

7

الدرس

الدوال الأصلية وحساب التكاملات

1 - مفهوم التكامل على مجال

1-1 تكامل دالة درجية

نقول أن f دالة درجية على المجال $[a, b]$ عندما نستطيع إيجاد تقسيم $[a, b]$ مشكل من الأعداد الحقيقية $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b$ بحيث $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$ و بحيث الدالة f ثابتة على كل مجال من الشكل $[x_{i-1}, x_i]$ حيث $n \geq 1$.

حالة دالة ثابتة على $[a, b]$

f دالة معرفة على مجال $[a, b]$ بحيث من أجل كل x من $[a, b]$ لدينا $f(x) = c$. القيمتان $f(a)$ و $f(b)$ يمكن أن تكونا مختلفتين عن العدد c .
بالتعريف تكامل الدالة f على المجال $[a, b]$ هو العدد الحقيقي $I(f)$ بحيث $I(f) = (b-a) \times c$

$$V_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2}$$

(1) بين أن المتتالية (V_n) متقاربة نحو $\frac{1}{2}$.

(2) بين أن كل من الدوال $f: x \mapsto x - \sin x$

$$h: x \mapsto -x + \frac{x^3}{6} + \sin x, \quad g: x \mapsto -1 + \frac{x^2}{2} + \cos x$$

تأخذ قيم موجبة أو معدومة على المجال $[0, +\infty]$. (استعمل تغيرات كل دالة)

(ب) تحقق أنه من أجل كل $n \geq 1$ يكون $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 \leq n^4$

ثم استنتج من (1) أن $V_n - \frac{1}{6} \times \frac{1}{n^2} \leq U_n \leq V_n$ من أجل كل $n \geq 0$

(ج) بين أن المتتالية (U_n) متقاربة ثم احسب نهايتها.

$$- 39 - (U_n) \text{ متتالية معرفة على } \mathbb{N} \text{ بـ } U_0 = 2 \text{ و } U_{n+1} = \frac{U_n - 1}{\sqrt{(U_n - 1)^2 + 1}} + 1$$

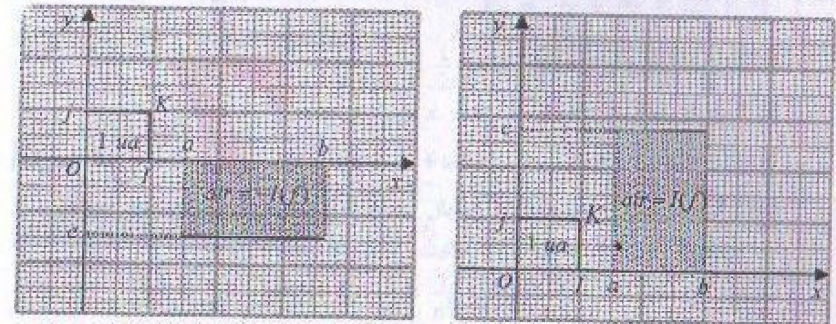
(1) تحقق أنه من أجل كل $n \geq 0$ يكون $U_n > 1$

ثم برهن أن المتتالية (U_n) متناقصة.

(3) برر تقارب المتتالية (U_n) .

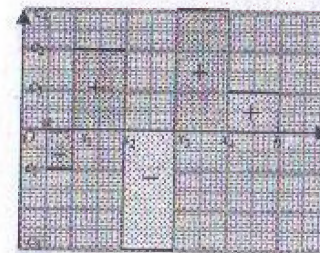
(4) احسب الخمسة الحدود الأولى (قيم دقيقة) ما هو التخمين فيما يخص عبارة U_n ؟

(5) ما هي نهاية المتتالية (U_n) ؟



لا $c < 0$ تكامل الدالة f هو عكس مساحة السطحيل للون.

لا $c > 0$ تكامل الدالة f هو مساحة السطحيل للون. وحدة المساحة هي مساحة السطحيل $OIKJ$.



حالة دالة درجبة على المجال $[a, b]$

إذا كان من أجل كل x من $[x_{i-1}, x_i]$ لدينا $f(x) = c_i$ فإن تكامل f على $[a, b]$ هو العدد $I(f)$ العرف بـ

$$I(f) = (x_1 - x_0)c_1 + (x_2 - x_1)c_2 + \dots + (x_n - x_{n-1})c_n$$

$$= \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})c_i$$

التكامل $I(f)$ على المجال $[a, b]$

نرمز له بـ $\int_a^b f(t) dt$ والذي يقرأ تكامل من a إلى b لـ $f(t)$ تفاضل t .

ملاحظة

بما أن التغير t أيكم نستطيع استبداله بأي متغير آخر وعليه،

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(u) du = \dots$$



مثال -

دالة درجبة معرفة على المجال $[-2, 3]$

$$g(x) = \begin{cases} 2 & , 0 \geq x \geq -2 \\ -3 & , 1 \geq x \geq 0 \\ 1 & , 3 \geq x \geq 1 \end{cases}$$

(y_f) منحناها في معلم متعامد ومتجانس

لنحسب $I(g)$

$$I(g) = (0+2) \times 2 + (1-0) \times (-3) + (3-1) \times 1$$

$$= +4 - 3 + 3 = 4$$

2-1 تكامل دالة مستمرة

حصر مساحة

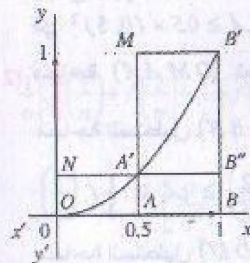
مثال -

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0, 1]$ بـ $f(x) = x^2$ و (y) قوسا من القطع

الكافى (p) المثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس (O, \vec{i}, \vec{j}) .

نريد تعيين حصر لمساحة حيز من المستوى تحت المنحنى المثل للدالة f المحدد بالقوس (y)

و محور الفواصل (xx') و المستقيم ذي المعادلة $x=1$ ولنكن A .



(1) نقوم بتقسيم المجال $[0, 1]$ إلى مجالين لهما نفس الطول 0,5.

على المجال $[0, 0,5]$ للمساحة التي تبحث عنها محصورة بين 0 و مساحة السطحيل $AONA'$ و على المجال $[0,5, 1]$ المساحة التي تبحث عنها محصورة بين

مساحتي السطحيلين $ABB'M$ و $ABB''A'$.

اعط حصرا للمساحة A على المجال $[0, 1]$.

(2) نقوم بتقسيم المجال $[0, 1]$ إلى ثلاثة

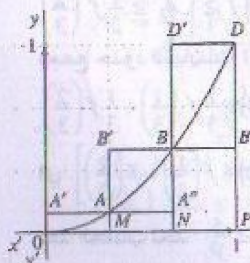
مجالات طول كل منها $\frac{1}{3}$ و عليه

فالمساحة التي تبحث عنها محصورة بين مساحتي السطحيلين $BB'NM$ و $AA'NM$.

على المجال $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$

- اعط حصرا للمساحة A ثم قارنه

مع الحصر الحاصل عليه في السؤال 1.



(3) نقسم المجال $[0, 1]$ إلى n مجال وطول كل منها $\frac{1}{n}$

و نعتبر المجال $I = \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right]$ مع k عدد طبيعي محصور بين 0 و $n-1$.

(أ) اعط حصرا لمساحة حيز من المستوي تحت المنحنى للمثل للنالة f على I بدلالة n و k .

(ب) اعط حصرا للمساحة \mathcal{A} مبينا ان محصورة بين متالتين (U_n) و (V_n) بحيث $V_n \geq \mathcal{A} \geq U_n$ اوجد عبارتهما.

(يعطى $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$)

(ج) احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$ ماذا تستنتج بالنسبة إلى \mathcal{A} ؟

الحل ✓

(1) مساحة $(A O A' N)$ تساوي $0,5 \times f(0,5)$ ومنه :

$$(1) \dots 0,5 \times f(0,5) \geq \mathcal{A}_0 \geq 0$$

مساحة $(A B B' M)$ تساوي $0,5 \times f(1)$ ومنه :

$$(2) \dots 0,5 \times f(1) \geq \mathcal{A}_1 \geq 0,5 \times f(0,5)$$

بجمع طرفي (1) و (2) نجد $0,5(f(0,5) + f(1)) \geq \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1 \geq 0,5 \times f(0,5)$

أي $0,625 \geq \mathcal{A} \geq 0,125$ بالحساب نجد $0,5(0,5)^2 + 1^2 \geq \mathcal{A} \geq 0,5 \times (0,5)^2$

(2) مساحة $(O M A' A')$ تساوي $\frac{1}{3} \times f(\frac{1}{3})$ ومنه $\frac{1}{3} \times f(\frac{1}{3}) \geq \mathcal{A}_0 \geq 0$ و (1) ...

مساحة المستطيل $(M N B B')$ تساوي $\frac{1}{3} \times f(\frac{2}{3})$ ومنه :

$$(2) \dots \frac{1}{3} f\left(\frac{2}{3}\right) \geq \mathcal{A} \geq \frac{1}{3} f\left(\frac{1}{3}\right)$$

مساحة المستطيل $(N P D D')$ تساوي $\frac{1}{3} \times f(1)$ ومنه :

$$(3) \dots \frac{1}{3} f(1) \geq \mathcal{A}_2 \geq \frac{1}{3} f\left(\frac{2}{3}\right)$$

بجمع حدود المتباينات (1) و (2) و (3) نجد :

$$\frac{1}{3} f\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} f\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{3} f(1) \geq \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 \geq \frac{1}{3} f(0) + \frac{1}{3} f\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} f\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$\left[f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{2}{3}\right) + f(1) \right] \geq \mathcal{A} \geq \frac{1}{3} \left[f(0) + f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{2}{3}\right) \right]$$

بعد الحساب نجد $\frac{14}{33} \geq \mathcal{A} \geq \frac{5}{33}$ أي $0,51 \geq \mathcal{A} \geq 0,18$

من السؤالين (1) و (2) نلاحظ ان التقسيم الثاني اعطى لنا حصرا افضل من الحصر الحاصل عليه في السؤال (1) و عليه كلما كانت التقسيمات كثيرة كان حصر المساحة \mathcal{A} أدق.

(3) أ) نرمز بـ \mathcal{A}_k إلى مساحة حيز من المستوي تحت المنحنى الممثل للدالة f على المجال I .

هذه المساحة محصورة بين مساحة المستطيلين $F_1 F_1' F_2 F_2'$ و $F_2 F_2' F_3 F_3'$.

مساحة $(F_1 F_1' F_2 F_2')$ تساوي $\frac{1}{n} \times f\left(\frac{k}{n}\right)$

مساحة $(F_2 F_2' F_3 F_3')$ تساوي $\frac{1}{n} \times f\left(\frac{k+1}{n}\right)$

إذن $\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \geq \mathcal{A}_k \geq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

نضع $h_n(t) = f\left(\frac{k+1}{n}\right)$ و $g_n(t) = f\left(\frac{k}{n}\right)$

مع k ينتمي إلى $\{0, 1, \dots, n-1\}$ و $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$ $t \in$

(ب) $\frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \geq \mathcal{A}_0 \geq \frac{1}{n} f(0)$

$\frac{1}{n} f\left(\frac{2}{n}\right) \geq \mathcal{A}_1 \geq \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$

⋮

$\frac{1}{n} f\left(\frac{n}{n}\right) \geq \mathcal{A}_{n-1} \geq \frac{1}{n} f\left(\frac{n-1}{n}\right)$

بجمع حدود المتباينات السابقة طرفا لطرف نجد :

$$\frac{1}{n} \left[f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right) \right] \geq \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1 + \dots + \mathcal{A}_{n-1} \geq \frac{1}{n} \left[f(0) + f\left(\frac{1}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n-1}{n}\right) \right]$$

وبما ان $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1 + \dots + \mathcal{A}_{n-1}$ فإنه نستنتج :

$$\frac{1}{n} \left[\frac{1^2}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + \dots + \frac{n^2}{n^2} \right] \geq \mathcal{A} \geq \frac{1}{n} \left[\frac{0^2}{n^2} + \frac{1^2}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + \dots + \frac{(n-1)^2}{n^2} \right]$$

$$\frac{1}{n^3} [1^2 + 2^2 + \dots + n^2] \geq \mathcal{A} \geq \frac{1}{n^3} [0^2 + 1^2 + \dots + (n-1)^2]$$

بوضع $V_n = \frac{1}{n^3} [1^2 + 2^2 + \dots + n^2]$ و $U_n = \frac{1}{n^3} [0^2 + 1^2 + \dots + (n-1)^2]$

تصبح المتباينة السابقة كما يلي $V_n \geq \mathcal{A} \geq U_n$

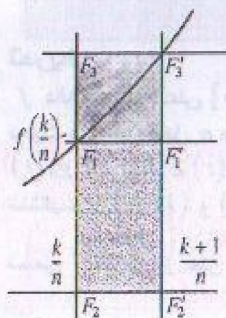
$$V_n = \frac{1}{n^3} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ و } U_n = \frac{1}{n^3} \times \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6}$$

U_n هي مساحة حيز من المستوي تحت المنحنى للدالة الدرجية g_n و لتكن $I(g_n)$

V_n هي مساحة حيز من المستوي تحت المنحنى للدالة الدرجية h_n و لتكن $I(h_n)$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^3}{6n^3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \text{ (ج)}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^3}{6n^3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$



$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \frac{1}{3} \text{ و } V_n \geq A \geq U_n$$

فإن حسب نظرية الحصر نستنتج $A = \frac{1}{3}$.

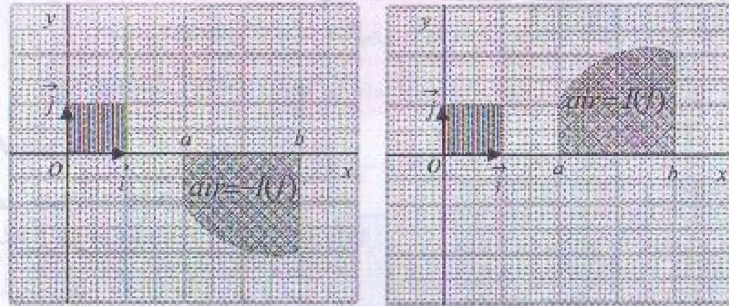
يمكننا التأكد من أن (U_n) و (V_n) متتاليتان متجاورتان و عليه فالمتاليتان (U_n) و (V_n) متقاربتين نحو نفس النهاية $\ell = \frac{1}{3}$ ، نقول أن هذه النهاية المشتركة ℓ هي تكامل f على المجال $[0, 1]$ و نرمز له بـ $\int_0^1 f(t) dt$ و نكتب $\int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{3}$

تعريف

f دالة مستمرة على $[a, b]$ ، نتقبل أنه توجد متتاليتين درجيتين (g_n) و (h_n) بحيث من أجل كل n من \mathbb{N}^* و من أجل t من $[a, b]$
(1) $h_n(t) \geq f(t) \geq g_n(t)$
(2) المتتاليتان $(I(h_n))$ و $(I(g_n))$ متقاربتان نحو نفس النهاية ℓ ...
نسمي ℓ تكامل f على $[a, b]$ و نكتب $\ell = \int_a^b f(t) dt$

ملاحظة

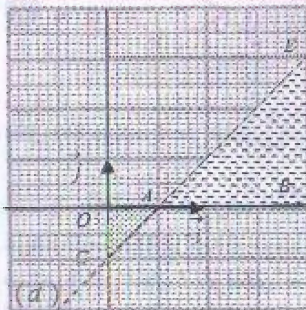
(1) إذا كانت (g_n) و (h_n) متتاليتين درجيتين لهما نفس خصائص (g_n) و (h_n) فإن ℓ هي كذلك نهاية $I(g_n)$ و $I(h_n)$.
(2) تجاور المتتاليتين $(I(h_n))$ و $(I(g_n))$ متعلق بطريقة تقسيم المجال $[a, b]$.
- إذا قسمنا المجال $[a, b]$ إلى 2^n مجال طول كل منها $\frac{b-a}{2^n}$ نتحصل دائما على متتاليتين $(I(h_n))$ و $(I(g_n))$ متجاورتين و هذا مهما كانت طبيعة f .
- إذا قسمنا المجال $[a, b]$ إلى n مجال طول كل منها $\frac{b-a}{n}$ فالمتتاليتان $(I(h_n))$ و $(I(g_n))$ الحصول عليهما متقاربتان نحو $\int_a^b f(t) dt$ لكن حتى ولو كانت f رتيبة على $[a, b]$ لستنا متأكدين من تجاور هاتين المتتاليتين.
(3) إذا كانت الدالة f مستمرة و موجبة فإن العدد $I(f)$ موجب و يعبر عن مساحة حيز من المستوى تحت المنحنى الممثل للدالة f .
- إذا كانت f مستمرة و سالبة فإن العدد $I(f)$ يعبر عن نظير مساحة حيز من المستوى تحت المنحنى الممثل للدالة f .



تمرين تدريبي 1

لكن f دالة معرفة بـ $f(x) = 2x - 1$.

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} f(t) dt \quad , \quad J = \int_{\frac{1}{2}}^2 f(t) dt$$



الحل

الدالة f ممثلة بالاستقيم (d) الذي يقطع محور الفواصل في النقطة $A(\frac{1}{2}, 0)$ ، ولتكن $B(2, 0)$ من محور الفواصل لتكن E نقطة من (d) فاصلتها 2 و ترتيبها 3.
(d) يقطع محور الترتيب في $C(0, -1)$
- على المجال $[\frac{1}{2}, 2]$ الدالة f موجبة

ومنه J هو مساحة المثلث ABE والتي تساوي $\frac{9}{4}$ وحدة المساحات وبالتالي $J = \frac{9}{4}$.

- على المجال $[0, \frac{1}{2}]$ الدالة f سالبة ومنه I نظير مساحة المثلث OCA التي هي $\frac{1}{4}$ ومنه $I = -\frac{1}{4}$.

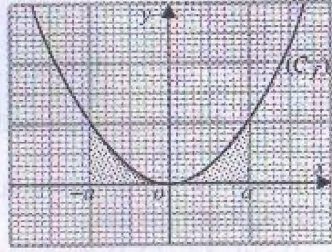
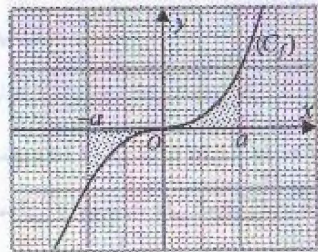
تمرين تدريبي 2

$$f \text{ دالة معرفة على المجال } [0, 4] \text{ بـ } \begin{cases} f(x) = x & , x \in [0, 1] \\ f(x) = 1 & , x \in [1, 2] \\ f(x) = -x+3 & , x \in [2, 4] \end{cases}$$

نتيجة

(1) إذا كانت f زوجية على $[-a, a]$ فإن $\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt$

(2) إذا كانت f فردية على $[-a, a]$ فإن $\int_{-a}^a f(t) dt = 0$



البراهين

حسب علاقة شال لدينا $\int_{-a}^a f(t) dt = \int_{-a}^0 f(t) dt + \int_0^a f(t) dt$

(1) إذا كانت f زوجية فإن الحيزين الملونين لهما نفس المساحة وعليه :

$$\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt \quad \text{ومنه} \quad \int_{-a}^0 f(t) dt = \int_0^a f(t) dt$$

(2) إذا كانت f فردية فإن الحيزين الملونين لهما نفس المساحة وعليه :

$$\int_{-a}^0 f(t) dt = - \int_0^a f(t) dt$$

$$\int_{-a}^a f(t) dt = 0 \quad \text{ومنه}$$

مثال 1

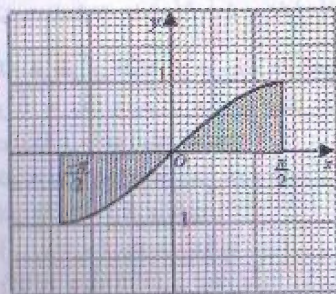
$f(x) = \sin x$ دالة معرفة على \mathbb{R} بـ

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(t) dt$$

الحل

الدالة f فردية على المجال $[-\pi/2, \pi/2]$

$$\text{ومنه} \quad I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(t) dt = 0$$



احسب التكاملين I و J التاليين $I = \int_0^3 f(t) dt$ ، $J = \int_3^4 f(t) dt$

ثم احسب $I+J$.

الحل

- على المجال $[0, 3]$ الدالة f موجبة ومنه I هو مساحة شبه المنحرف $OABC$

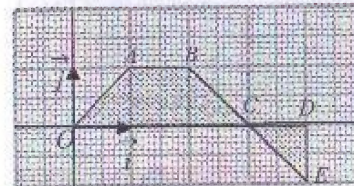
والتي تساوي $\frac{(3+1) \times 1}{2}$ أي 2

ومنه $I = 2$ وحدة المساحات

- على المجال $[3, 4]$ الدالة f سالبة

ومنه J هو نظير مساحة المثلث CED التي تساوي $\frac{1}{2}$ ومنه $J = -\frac{1}{2}$

$$\text{إذن} \quad I+J = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$



2 - خواص التكامل

مبرهنة

كل دالة مستمرة على مجال $[a, b]$ تقبل تكاملا على هذا المجال.

1-2 تمديد تعريف التكامل إلى a و b كـ

عرفنا تكامل دالة درجبة أو مستمرة على مجال $[a, b]$ مع $a < b$ والآن إذا كانت f دالة

مستمرة على مجال I ، وكان a و b عددين من I بحيث $a \geq b$

نضع التعريف التالي :

$$\text{إذا} \quad a > b \quad \text{تكون} \quad \int_a^b f(t) dt = - \int_b^a f(t) dt \quad \text{وإذا} \quad a = b \quad \text{تكون} \quad \int_a^a f(t) dt = 0$$

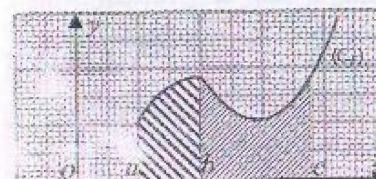
2-2 علاقة شال

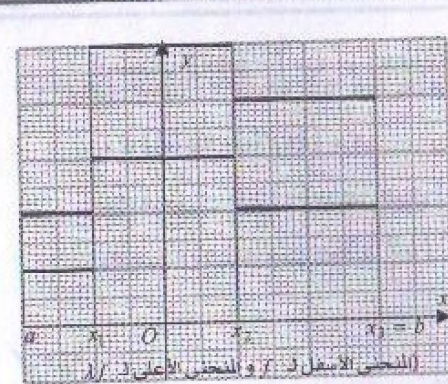
مبرهنة

f دالة مستمرة على I . مهما تكن الأعداد

الحقيقية a, b, c من I

$$\int_a^b f(t) dt + \int_b^c f(t) dt = \int_a^c f(t) dt$$





(2) نفرض أن f دالة مستمرة على المجال $[a, b]$

عنئذ من أجل كل n من \mathbb{N}^* توجد

دالتان درجيتان g_n و h_n بحيث من

أجل كل t من $[a, b]$

يكون $h_n(t) \geq f(t) \geq g_n(t)$

و $I(f)$ النهاية المشتركة للمتالتين

$(I(g_n))$ و $(I(h_n))$.

- لـ $\lambda \geq 0$ فإنه من أجل كل t من

$[a, b]$ و كل n من \mathbb{N}^* يكون:

$\lambda h_n(t) \geq \lambda f(t) \geq \lambda g_n(t)$

لنبين أن المتالتين $(I(\lambda h_n))$ و $(I(\lambda g_n))$ متقاربتان نحو نفس النهاية

بالتعريف تكون $I(\lambda f)$ هي النهاية المشتركة.

بما أن المتتالية $(I(g_n))$ متقاربة نحو $I(f)$ فإن المتتالية $(\lambda I(g_n))$ متقاربة

نحو $\lambda I(f)$. وبما أن دالتان درجيتان فإن $I(\lambda g_n) = \lambda I(g_n)$ من أجل

كل $n \geq 1$

وبالتالي $(I(\lambda g_n))$ متقاربة نحو $\lambda I(f)$.

بنفس الكيفية نبين أن $(I(\lambda h_n))$ متقاربة نحو $\lambda I(f)$

إذن $I(\lambda f) = \lambda I(f)$.

- بضرب الثابتة λ بالعدد λ نجد

$\lambda g_n(t) \geq \lambda f(t) \geq \lambda h_n(t)$ ونبرهن بنفس الكيفية السابقة أن $\lambda I(f) = I(\lambda f)$

لـ $a \geq b$ فإنه من التعريف:

$\int_a^b (\lambda f)(t) dt = - \int_b^a (\lambda f)(t) dt$ و $\int_a^b f(t) dt = - \int_b^a f(t) dt$

وحسب النتيجة السابقة $\int_a^b (\lambda f)(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt$

إذن $\int_a^b (\lambda f)(t) dt = - \int_b^a (\lambda f)(t) dt = - \lambda \int_b^a f(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt$

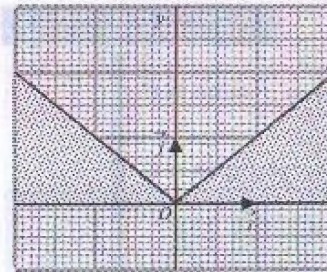
أي $I(\lambda f) = \lambda I(f)$ أي

مثال -

f و g دالتان مستمرتان على المجال $[2, 7]$ إذا علمت أن:

$$K = \int_2^7 g(x) dx = 13 \text{ و } J = \int_7^3 f(x) dx = 3 \text{ و } I = \int_2^3 f(x) dx = -5$$

مثال 2



f دالة معرفة على \mathbb{R} بـ $f(x) = |x|$

احسب التكامل $I = \int_{-2}^2 f(t) dt$

الحل

الدالة f زوجية على المجال $[-2, 2]$

ومنه $I = \int_{-2}^2 f(t) dt = 2 \int_0^2 f(t) dt$

وبما أن f موجبة على المجال $[0, 2]$

فإن $\int_0^2 f(t) dt$ تساوي مساحة المثلث OAB التي هي 2 وحدة المساحات

وعليه $I = 2 \int_0^2 f(t) dt = 2 \times 2 = 4$

3-2 خطية التكامل

مبرهنة

f و g دالتان مستمرتان على مجال I و λ عدد حقيقي كفي.

مهما يكن العددين الحقيقيان a و b من I لدينا

$$\int_a^b (\lambda f + g)(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt \text{ و } \int_a^b \lambda f(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt$$

الإثبات

نثبت المساواة $\int_a^b \lambda f(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt$ أي $\lambda I(f) = I(\lambda f)$

(1) نفرض أن الدالة f درجية على المجال $[a, b]$ إذن يوجد تقسيم \mathcal{P} مع $x_0 = a$

و $x_n = b$ و بحيث من أجل كل x من $[x_{i-1}, x_i]$ مع $n \geq i \geq 1$

عنئذ من أجل كل x من $[x_{i-1}, x_i]$ $(\lambda f)(x) = \lambda f(x) = \lambda c_i$ و عليه λf

ثابتة على كل مجال من هذه المجالات

إذن فالدالة λf درجية.

$$I(\lambda f) = \lambda c_1 (x_1 - x_0) + \dots + \lambda c_n (x_n - x_{n-1})$$

$$= \lambda [c_1 (x_1 - x_0) + \dots + c_n (x_n - x_{n-1})] = \lambda I(f)$$

(أ) احسب $L = \int_2^7 f(x) dx$ و $M = \int_2^7 (f+g)(x) dx$ و

$$N = \int_2^7 (4f(x) - 5g(x)) dx$$

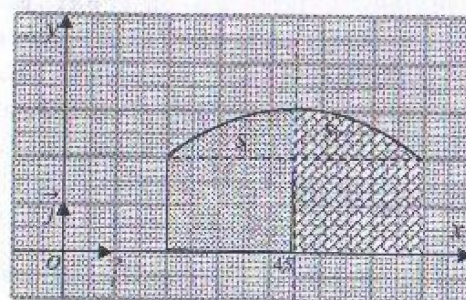
(ب) نفرض أن $g(x) > 0$ على المجال $[2, 7]$ و المنحنى البياني لـ g متناظر

بالنسبة إلى المستقيم ذي المعادلة $x = \frac{9}{2}$. احسب $\int_2^5 g(x) dx$.

✓ الحل

$$L = \int_2^7 f(x) dx = \int_2^3 f(x) dx + \int_3^7 f(x) dx = \int_2^3 f(x) dx - \int_3^7 f(x) dx = I - J = -8 \quad (1)$$

$$M = \int_2^7 (f+g)(x) dx = \int_2^7 f(x) dx + \int_2^7 g(x) dx = L + K = -8 + 13 = 5$$



$$N = \int_2^7 4f(x) dx - \int_2^7 5g(x) dx = 4 \times L - 5K = -32 - 65 = -97$$

$$S_1 = \int_2^{4.5} g(x) dx \quad (ب)$$

$$S_2 = \int_{4.5}^7 g(x) dx$$

بما أن المنحنى الممثل للدالة g متناظر

بالنسبة إلى المستقيم ذي المعادلة $x = 4,5$

فإن $S_1 = S_2$ و $S_1 + S_2 = 13$ ومنه $S_1 = \frac{13}{2}$

4-2 إشارة التكامل والمقارنة

مبرهنة

f و g دالتان مستمرتان على مجال I ، وليكن a و b عددين حقيقيين من I .

(1) إذا كان $a \leq b$ و $f \geq 0$ على $[a, b]$ فإن $\int_a^b f(t) dt \geq 0$

(2) إذا كان $a \leq b$ و $f \geq g$ على $[a, b]$ فإن $\int_a^b f(t) dt \geq \int_a^b g(t) dt$

الإضافات

(1) رأينا في ما سبق أنه إذا كانت f موجبة على $[a, b]$ فإن $I(f)$ يمثل المساحة و

بالتالي فهو موجب إذن $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

(2) من الفرض $f \geq g$ نستنتج أن $f - g \geq 0$ على المجال $[a, b]$

وعليه $I(f - g) \geq 0$ لكن $I(f - g) = I(f) - I(g)$

إذن $\int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx \geq 0$

ومنه نستنتج $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$

◆ مثال

عين إشارة التكامل $I = \int_0^1 (x^2 - 1) dx$ و $J = \int_1^2 (x^2 - 1) dx$

✓ الحل

لتعيين إشارة I نعين إشارة الدالة f للفترة على $[0, 2]$ بـ $f(x) = x^2 - 1$

- إذا كان $x \in [0, 1]$ فإن $f(x) \leq 0$ إذن $\int_0^1 -f(x) dx \geq 0$ وحسب الخطية

$$\int_0^1 f(x) dx \leq 0 \quad \text{وعليه نستنتج} \quad \int_0^1 -f(x) dx = -\int_0^1 f(x) dx$$

- إذا كان $x \in [1, 2]$ فإن $f(x) \geq 0$ ومنه $\int_1^2 f(x) dx \geq 0$

5.2 القيمة المتوسطة للدالة - حصر القيمة المتوسطة

مبرهنة 1

f دالة مستمرة على مجال I ، وليكن a و b عددين حقيقيين مختلفين من I ، عندئذ

يوجد عدد حقيقي c محصور بين a و b بحيث $\int_a^b f(t) dt = (b-a)f(c)$

العدد $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$ يسمى القيمة المتوسطة للدالة f بين a و b

نفرض أن الدالة f متزايدة.

الحالة الأولى $a < b$

بما أن f متزايدة فإنه من أجل كل x من $[a, b]$ فإن $f(b) \geq f(x) \geq f(a)$

ومنه نستنتج $f(b)(b-a) \geq \int_a^b f(x) dx \geq f(a)(b-a)$

وبما أن $b-a > 0$ نجد $f(b) \geq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \geq f(a)$

بما أن f متزايدة ومستمرة على $[a, b]$

فإنه يوجد عدد حقيقي c من $[a, b]$

بحيث $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$

الحالة الثانية $a > b$

لدينا في هذه الحالة $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$

وبما أن $b < a$ فإنه يوجد c محصور بين a و b بحيث $\int_b^a f(x) dx = (a-b)f(c)$

ومنه $\int_a^b f(x) dx = (b-a)f(c)$ أي $\int_a^b f(x) dx = -(a-b)f(c)$

مرهنة 2

f دالة مستمرة على مجال I ، وليكن m و M عددين حقيقيين مختلفين، وليكن أيضا a و b عددين حقيقيين من I بحيث $a \leq b$

إذا كانت $m \leq f(x) \leq M$ على المجال $[a, b]$ فإن $m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$

الإثبات

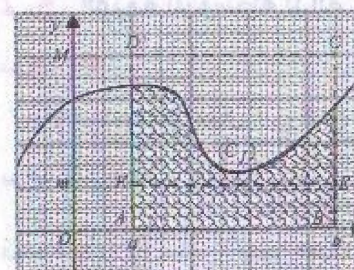
من أجل كل x من $[a, b]$ لدينا،

(1) $m \leq f(x) \leq M$

الناتان $x \mapsto m$ و $x \mapsto M$ ثابتان على $[a, b]$

إذن $\int_a^b m dt = m(b-a)$ و $\int_a^b M dt = M(b-a)$

وبما أن $a \leq b$ و بتكامل المتباينة (1) نحصل على



$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

بالقسمة على $(b-a)$ نجد $m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$

نتيجة

f دالة مستمرة على مجال I وليكن a و b عددين حقيقيين من I وليكن M عدد حقيقي موجب.

إذا كانت $|f(x)| \leq M$ على $[a, b]$ أو $[b, a]$

فإن $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq M|b-a|$

مرهنة

(1) f دالة مستمرة وسالبة على المجال $[a, b]$ عندئذ $\int_a^b f(x) dx = - \int_a^b |f(x)| dx$

(2) إذا كانت f تتعدم عند c من $[a, b]$ و $f(x)$ سالبة على $[a, c]$ وموجبة على $[c, b]$

فإن $\int_a^b f(x) dx = - \int_a^c |f(x)| dx + \int_c^b f(x) dx$

الإثبات

(1) نضع $f(x) = -g(x)$ حيث $g(x)$ موجبة

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b -g(x) dx = - \int_a^b g(x) dx = - \int_a^b |f(x)| dx$$

(لأن $g(x) = -f(x) = |f(x)|$)

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = - \int_a^c |f(x)| dx + \int_c^b f(x) dx \quad (2)$$

ملاحظة

(1) إذا كانت f سالبة على مجال I فإن تكامل f على I هو نظير مساحة حيز من المستوى فوق المنحنى للمثل للدالة f

(2) إذا غيرت f إشارتها على I نجزئ المجال I إلى مجالات جزئية بحيث الدالة f لها إشارة ثابتة على كل منها ثم نجمع التكاملات الحسوبية على كل مجال

تمرين تدريبي 1

$$0 \leq \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} dx \leq 2 \quad (2) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt \leq \frac{\pi}{2} \quad (1) \text{ بين أن}$$

✓ الحل

في الحالتين أن الدالتين العطاء مستمرتان على \mathbb{R} إذن فهما قابلتان للمكاملة على مجال التكامل.

(1) من أجل كل t من $[0, \frac{\pi}{2}]$ يكون $0 \leq \cos t \leq 1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt = 1 \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{\pi}{2} \quad \text{لكن} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt \leq \frac{\pi}{2}$$

(2) بما أن $0 \leq x \leq 2$ فإن $0 \leq \frac{2x}{x^2+1} \leq 2$ ومنه

$$0 \leq \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} dx \leq \int_0^1 2 dx$$

$$\int_0^1 2 dx = 2(1-0) = 2 \quad \text{لكن} \quad \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} dx \leq 2 \quad \text{إذن}$$

تمرين تدريبي 2

f دالة معرفة معرفة على \mathbb{R} بـ $f(x) = x-1$ و (d) تمثيله البياني في معلم متعامد ومتجانس.

(أ) احسب التكامل $I = \int_0^2 f(x) dx$ ثم احسب القيمة المتوسطة لـ f على $[0, 2]$.

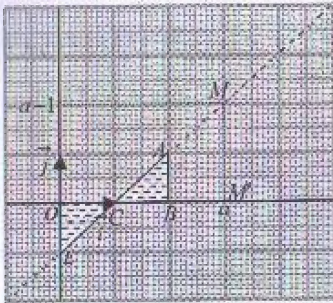
(ب) ليكن a عددا حقيقيا بحيث $a > 2$ و M نقطة من (d) ذات الفاصلة a .

احسب $S(a) = \int_2^a f(x) dx$ ثم قارن بين $f(a)$ و $S'(a)$.

✓ الحل

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx \quad (1)$$

الدوال الأصلية وحساب التكاملات



بما أن f سالبة على المجال $[0, 1]$

$$\text{فإن} \quad \int_0^1 f(x) dx$$

هو نظير مساحة المثلث OEC التي تساوي $\frac{1}{2}$

$$\text{ومنه} \quad \int_0^1 f(x) dx = -\frac{1}{2}$$

بما أن f موجبة على $[1, 2]$ فإن $\int_1^2 f(x) dx$

هي مساحة المثلث ACB و التي تساوي 1

$$\text{ومنه} \quad \int_1^2 f(x) dx = 1 \quad \text{إذن} \quad I = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[0, 2]$ هي M حيث

$$M = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

(ب) بما أن f موجبة على $[2, a]$ فإن $\int_2^a f(x) dx$ يساوي مساحة شبه المنحرف $AMBM'$

$$\text{والتي تساوي} \quad \frac{[(a-1)+1](a-2)}{2} \quad \text{أي} \quad \frac{a(a-2)}{2}$$

$$\text{إذن} \quad S(a) = \int_2^a f(x) dx = \frac{a(a-2)}{2}$$

الدالة S قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ولدينا $S'(a) = a-1 = f(a)$

3 - دوال أصلية لدالة

مبرهنة

f دالة مستمرة على مجال $I = [a, b]$ يشمل α

مهما يكن العدد الحقيقي x من I ، فإن الدالة F المعرفة بـ $F(x) = \int_a^x f(t) dt$

قابلة للاشتقاق على I ولدينا $F'(x) = f(x)$.

الإثبات

نفرض أن f متزايدة تماما وموجبة على مجال $[a, b]$ وليكن α و $\alpha+h$ عددين حقيقيين من $[a, b]$.

$$F(\alpha) = \int_a^\alpha f(t) dt \text{ و } F(\alpha+h) = \int_a^{\alpha+h} f(t) dt$$

مساحة الحيز المشط هي :

$$h > 0 \Rightarrow F(\alpha) - F(\alpha+h) \text{ و } h < 0 \Rightarrow F(\alpha+h) - F(\alpha)$$

$$h \times f(\alpha) \leq F(\alpha+h) - F(\alpha) \leq h \times f(\alpha+h)$$

$$\text{ولمنا نستنتج (في حالة } h \text{ موجبة) } f(\alpha) \leq \frac{F(\alpha+h) - F(\alpha)}{h} \leq f(\alpha+h)$$

$$\text{و (في حالة } h \text{ سالبة) } f(\alpha+h) \leq \frac{F(\alpha+h) - F(\alpha)}{h} \leq f(\alpha)$$

وبما أن f مستمرة عند α

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(\alpha+h) - F(\alpha)}{h} = f(\alpha)$$

وحسب نظرية الحصر

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(\alpha+h) - F(\alpha)}{h} = f(\alpha)$$

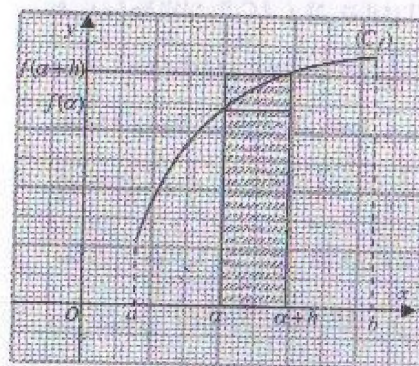
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(\alpha+h) - F(\alpha)}{h} = F'(\alpha)$$

وعليه $F'(\alpha) = f(\alpha)$ من أجل

كل α من $[a, b]$.

بطريقة مماثلة نبين أن $F'(\alpha) = f(\alpha)$

في حالة f متناقصة تماما على I .



1.3 تعريف

كل دالة F قابلة للاشتقاق على مجال I وبذلك أنه من أجل كل x من I يكون

$$F'(x) = f(x) \text{ هي دالة أصلية لدالة } f \text{ على مجال } I$$

مثال .

(1) f و g دالتان معرفتان على $[0, +\infty[$ بـ

$$g(x) = \ln x \text{ و } f(x) = \frac{1}{x}$$

من أجل كل x من $[0, +\infty[$ لدينا $g'(x) = f(x)$

ومنه g دالة أصلية لدالة f على $[0, +\infty[$.

(2) f و g دالتان معرفتان على \mathbb{R} بـ $g(x) = \cos x$ و $f(x) = -\sin x$

من أجل كل x من \mathbb{R} لدينا $g'(x) = f(x)$

ومنه g أصلية لـ f على \mathbb{R} .

2-3 العلاقة بين دالتين أصليتين لدالة

مبرهنة

f دالة مستمرة على مجال I .

إذا كانت F دالة أصلية لـ f على I فإن الدالة f تقبل ما لا نهاية من الدوال الأصلية.

من الشكل $G(x) = F(x) + k$ حيث k عدد حقيقي.

الإثبات

لدينا فرضاً F قابلة للاشتقاق على I و $F'(x) = f(x)$

الدالة G قابلة للاشتقاق على I وبحيث $G' = F' = f$

إذن G دالة أصلية لـ f على I .

وبالعكس إذا كانت G دالة أصلية لـ f على I فإن $G' = f = F'$

وعليه $G' - F' = 0$ ومنه $G - F$ ثابتة

أي $G(x) - F(x) = k$ ومنه $G(x) = F(x) + k$.

مثال .

$$f(x) = x^2 \text{ و } g(x) = \frac{1}{3}x^3 \text{ بـ } \mathbb{R} \text{ دالتان معرفتان على } \mathbb{R}$$

الدالة g قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ولدينا $g'(x) = x^2 = f(x)$

منه g دالة أصلية للدالة f على \mathbb{R} وبالتالي كل الدوال G المعرفة على \mathbb{R} بـ

$$G(x) = \frac{1}{3}x^3 + k \text{ حيث } k \text{ عدد حقيقي هي دوال أصلية لـ } f \text{ على } \mathbb{R}$$

3-3 الدالة الأصلية التي تأخذ قيمة معينة من أجل قيمة معلومة للمتغير

مبرهنة

x_0 عدد حقيقي من مجال I و y_0 عدد حقيقي كافي

عندئذ توجد دالة أصلية وحيدة G لـ f على I بحيث $G(x_0) = y_0$.

الإثبات

إذا كانت F دالة أصلية لـ f على I فإن كل دالة أصلية أخرى G لـ f تكتب على الشكل

$$G(x) = F(x) + k \text{ مع } k \text{ عدد حقيقي و تكون } G(x_0) = y_0 \text{ نجد } F(x_0) + k = y_0$$

$$\text{ومنه } k = y_0 - F(x_0)$$

إذن k وحيد وبالتالي توجد دالة أصلية وحيدة تحقق الشرط $G(x_0) = y_0$.

مثال .

$$f(x) = x^2 \text{ و } g(x) = \frac{1}{3}x^3$$

الدوال الأصلية للدالة f هي من الشكل $G(x) = \frac{1}{3}x^3 + k$ مع k عدد حقيقي

و الآن نبحث عن الدالة الأصلية التي تحقق $G(1) = 2$.

$$G(1) = 2 \quad \text{تكافئ} \quad \frac{1}{3} \times 1^3 + k = 2 \quad \text{تكافئ} \quad k = \frac{5}{3}$$

إذن الدالة الأصلية للدالة f التي تحقق $G(1) = 2$ هي $G(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{3}$

3-4 الدالة الأصلية لدالة مستمرة

مبرهنة

f دالة مستمرة على مجال I و a عدد حقيقي من I

عندئذ فالدالة $F: x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ المعرفة على I هي الدالة الأصلية الوحيدة لـ f على I

بحيث $F(a) = 0$

تمرين تدريبي 1

$$F \text{ دالة معرفة بـ } F(x) = \int_0^x e^{-\frac{t}{2}} dt$$

(أ) عين مجموعة تعريف الدالة F .

(ب) احسب $F'(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة F ثم عين إشارتها.

✓ الحل

(أ) الدالة $t \mapsto e^{-\frac{t}{2}}$ معرفة و مستمرة على \mathbb{R}
إذن الدالة F معرفة و قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} وبالتالي $D_F = \mathbb{R}$.

(ب) من أجل كل x من \mathbb{R} لدينا $F'(x) = e^{-\frac{x}{2}}$

وبما أن $e^{-\frac{x}{2}} > 0$ من أجل كل x من \mathbb{R}

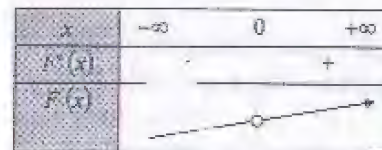
فإن $F'(x) > 0$

وبالتالي F متزايدة تماماً على \mathbb{R}

$$\text{و } F(0) = \int_0^0 e^{-\frac{t}{2}} dt = 0$$

وعليه إذا كان $x > 0$ فإن $F(x) > 0$

وإذا كان $x < 0$ فإن $F(x) < 0$



تمرين تدريبي 2

لتكن f دالة معرفة على المجال $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ بـ $f(x) = \tan x$

(أ) عين المشتقة f' للدالة f .

(ب) استنتج الدالة الأصلية للدالة $f: x \mapsto \tan^2 x$ و التي نتعلم من أجل $x = \frac{\pi}{4}$

✓ الحل

(أ) الدالة f قابلة للاشتقاق على $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ و لدينا $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

(ب) لدينا $\tan^2 x = f'(x) - 1$ ومنه الدوال الأصلية للدالة $x \mapsto \tan^2 x$ هي الدوال $G(x) = f(x) - x + k$ حيث k عدد حقيقي.

$$G\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \quad \text{يكافئ} \quad \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{4} + k = 0 \quad \text{يكافئ} \quad k = \frac{\pi}{4} - 1$$

إذن الدالة الأصلية المطلوبة هي $G(x) = \tan(x) - x + \frac{\pi}{4} - 1$

4 - حساب الدوال الأصلية

4-1 دوال أصلية لدوال شهيرة

- إذا كانت F و G دالتين أصليتين لدالتين f و g على التوالي على مجال I

فإن $F+G$ دالة أصلية للدالة $f+g$ على I .

- إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على I و λ عدد حقيقي

فإن λF أصلية لـ λf على I

- نفس النتائج المعروفة حول مشتقات الدوال الشهيرة وبقراءة مقلوبة تعطي لنا الدوال الأصلية كما في الجدول التالي:

الدالة f	الأصلية F	على المجال $I = \dots$
ثابت a	ax	\mathbb{R}
x^n ($n \in \mathbb{N}$)	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	\mathbb{R}
(n صحيح سالب و يختلف عن -1) x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R} - \{0\}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0, +\infty[$

$\frac{1}{x}$	$\ln x$	$]0, +\infty[$
e^x	e^x	\mathbb{R}
$\sin x$	$-\cos x$	\mathbb{R}
$\cos x$	$\sin x$	\mathbb{R}
$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[, k \in \mathbb{Z}$

2-4 دساتير عامة

معرفة مشتق بعض الدوال المركبة يسمح لنا بتعيين دوال أصلية لدوال أخرى و الجدول التالي يلخص هذه الحالات مع U دالة قابلة للاشتقاق على I .

الدالة f	الأصلية F	ملاحظة
U^n ($n \in \mathbb{Z} - \{-1\}$)	$\frac{1}{n+1} U^{n+1}$	لما $n \neq -1$ من أجل كل x من I $U(x) \neq 0$
$\frac{U}{\sqrt{U}}$	$2\sqrt{U}$	$U > 0$ على I
$\frac{U'}{U}$	$\ln U $	$U \neq 0$
$U' e^{U'}$	e^U	
$x \mapsto U(ax+b)$	$x \mapsto \frac{1}{a} g(ax+b)$	g دالة أصلية للدالة U على I

تمرين تدريبي

عين الدالة الأصلية F على I من أجل كل دالة f مستمرة على المجال المعطى

$$f(x) = \frac{1}{(2x-1)^3}, I =]\frac{1}{2}, +\infty[\quad (\text{ب}) \quad f(x) = (2x-1)^3, I = \mathbb{R} \quad (\text{ا})$$

$$f(x) = \frac{5x}{\sqrt{3x^2+3}}, I = \mathbb{R} \quad (\text{د}) \quad f(x) = \frac{3x}{x^2+1}, I = \mathbb{R} \quad (\text{ج})$$

الحل ✓

نكتب f على شكل αg حيث α عدد حقيقي و g دالة نعرف دالتها الأصلية باستعمال الدساتير العامة و الأشكال التي نبحث عنها هي من الشكل :

$$f = \alpha U' e^{U'} \quad , \quad f = \alpha \frac{U'}{\sqrt{U}} \quad , \quad f = \alpha \frac{U'}{U} \quad , \quad f = \alpha U' U^n$$

(ا) نضع $U(x) = 2x-1$ وبالتالي $f(x) = (U(x))^3$

الدالة U قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ولدينا $U'(x) = 2$

$$\text{إذن } f(x) = \frac{1}{2} \times 2 \times (U(x))^3 = \frac{1}{2} \times U'(x) \times (U(x))^3$$

$$\text{إذن فالدالة الأصلية على } \mathbb{R} \text{ هي } F \text{ حيث } F = \frac{1}{2} \times \frac{U^4}{4} = \frac{U^4}{8}$$

ومن أجل كل x من \mathbb{R} يكون $F(x) = \frac{1}{8}(2x-1)^4$

(ب) نضع $U(x) = 2x-1$ وبالتالي $f(x) = \frac{1}{U^3(x)}$

الدالة U قابلة للاشتقاق على $]-\frac{1}{2}, +\infty[$ ولدينا $U'(x) = 2$

$$\text{وبالتالي } f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{(U(x))^3} = \frac{1}{2} \times \frac{U'(x)}{(U(x))^3} = \frac{1}{2} U'(x) \times (U(x))^{-3}$$

$$\text{إذن فالدالة الأصلية على } I \text{ هي } F = \frac{1}{2} \times \frac{U^{-2}}{-2} = -\frac{1}{4} U^{-2}$$

ومن أجل كل x من I يكون $F(x) = -\frac{1}{4(2x-1)^2}$

(ج) نضع $x^2+1=U(x)$

الدالة U قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ولدينا $U'(x) = 2x$

$$\text{وبالتالي } f(x) = \frac{3}{2} \times \frac{2x}{x^2+1} = \frac{3}{2} \frac{U'(x)}{U(x)}$$

$$\text{إذن فالدالة الأصلية على } \mathbb{R} \text{ لـ } f \text{ هي } F \text{ حيث } F(x) = \frac{3}{2} \ln |U(x)|$$

وبما أن $U(x) > 0$ فإن $F(x) = \frac{3}{2} \ln U(x)$

$$\text{إذن من أجل كل } x \text{ من } \mathbb{R} \text{ يكون } F(x) = \frac{3}{2} \ln(x^2+1)$$

(د) نضع $U(x) = 3x^2+3$

الدالة U قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ولدينا $U'(x) = 6x$

$$\text{وبالتالي } f(x) = \frac{5}{6} \times \frac{6x}{\sqrt{3x^2+3}} = \frac{5}{6} \times \frac{U'(x)}{\sqrt{U(x)}}$$

$$\text{إذن فالدالة الأصلية على } \mathbb{R} \text{ لـ } f \text{ هي } F = \frac{5}{3} \sqrt{U}$$

$$\text{ومن أجل كل } x \text{ من } \mathbb{R} \text{ يكون } F(x) = \frac{5}{3} \sqrt{3x^2+3}$$

5 - حساب التكامل

1-5 حساب التكامل باستعمال الدالة الأصلية

مبرهنة

إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I و F دالة أصلية لكيفية للدالة f على I وإذا كان a و b عددين حقيقيين من I فإن $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$

الإثبات

الدالة $G: x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ هي دالة أصلية لـ f على I بحيث $G(a) = 0$

إذا كانت F دالة أصلية لكيفية لـ f على I فإنه يوجد عدد حقيقي ثابت k بحيث من أجل كل x من I لدينا $G(x) = F(x) + k$

وبما أن $G(a) = 0$ فإن $k = -F(a)$

إذن من أجل كل x من I يكون $G(x) = F(x) - F(a)$

وباختيار $x = b$ نحصل على $G(b) = F(b) - F(a)$

أي $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$

ملاحظة

تكتب الفرق $F(b) - F(a)$ على الشكل $[F(x)]_a^b$

وكذلك $\int_a^b f(t) dt = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

مثال -

(1) على \mathbb{R} الدالة $x \mapsto \sin x$ لها دالة أصلية هي $x \mapsto -\cos x$ ومنه

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) dt = [-\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} = (-\cos \frac{\pi}{2}) - (-\cos 0) = 1$$

(2) على \mathbb{R} الدالة $x \mapsto x^3 + x + 1$ لها دالة أصلية هي $x \mapsto \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x$ ومنه

$$\int_0^1 (t^3 + t + 1) dt = \left[\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + t \right]_0^1 = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 \right) - (0) = \frac{11}{6}$$

5-2 التكامل بالتجزئة

مبرهنة

U و V دالتان قابلتان للاشتقاق على I بحيث مشتقاهما U' و V' مستمرتان على I عندئذ من أجل كل عددين حقيقيين a و b من I يكون،

$$\int_a^b U(t) V'(t) dt = [U(t) V(t)]_a^b - \int_a^b U'(t) V(t) dt$$

الإثبات

الدالة $U \times V$ قابلة للاشتقاق على I ولدينا $(U \times V)' = U' \times V + U \times V'$

ومنه $U V' = (U V)' - U' V$

بما أن الدوال $U V'$ و $(U V)'$ مستمرتان على I فإن،

$$\int_a^b (U V')(t) dt = \int_a^b [(U V)'(t) - (U' V)(t)] dt$$

$$(1) \quad \int_a^b (U V')(t) dt = \int_a^b (U V)'(t) dt - \int_a^b (U' V)(t) dt$$

لكن $U V$ هي الدالة الأصلية لـ $(U \times V)'$ على I

$$\int_a^b (U V)'(t) dt = [U(t) V(t)]_a^b$$

ومنه المساواة (1) تكتب على الشكل،

$$(2) \quad \int_a^b (U)(t) V'(t) dt = [U(t) V(t)]_a^b - \int_a^b U'(t) V(t) dt$$

تسمى المساواة (2) دستور التكامل بالتجزئة.

مثال -

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t dt$$

الحل

التكامل $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t dt$ من الشكل $\int_a^b U(t) V'(t) dt$ مع $U(t) = t$ و $V'(t) = \sin t$

ومنه نجد $U'(t) = 1$ و $V(t) = -\cos t$

الدالتان U و V قابلتان للاشتقاق على $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ومشتقاتهما U' و V' مستمرتان على

$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ وحسب دستور التكامل بالتجزئة نجد :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t dt = \left[-t \cos t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos t dt = \left[-t \cos t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[-\sin t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ = \left[\left(-\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} \right) - (0 \cos 0) \right] - \left[\left(-\sin \frac{\pi}{2} \right) - (-\sin 0) \right] = 1$$

تمرين تدريبي 1

(أ) احسب قيمة التكامل $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$

(ب) احسب قيمة التكامل $J = \int_0^1 x e^x dx$

✓ الحل

الدساتير العامة لا تسمح لنا بتعيين الدالة الأصلية للدالتين $x \mapsto x \cos x$ و $x \mapsto x e^x$.

(أ) نضع $U(x) = x$ و $V'(x) = \cos x$ ومنه نجد $U'(x) = 1$ و $V(x) = \sin x$.

الدالتان U و V قابلتان للاشتقاق على \mathbb{R}

و U' و V' مستمرتان على \mathbb{R}

وحسب دستور التكامل بالتجزئة نجد $I = \left[x \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$

$$= \left[x \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[-\cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = (0) - (0) - [1 - (-1)] = -2$$

(ب) نضع $U(x) = x$ و $V'(x) = e^x$ ومنه نجد $U'(x) = 1$ و $V(x) = e^x$.

الدالتان U و V قابلتان للاشتقاق على \mathbb{R}

و U' و V' مستمرتان على \mathbb{R}

إذن حسب دستور التكامل بالتجزئة نجد :

$$J = \left[x e^x \right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = \left[x e^x \right]_0^1 - \left[e^x \right]_0^1 = e - (e - 1) = 1$$

تمرين تدريبي 2

أوجد دالة أصلية على المجال $[0, +\infty[$ للدالة $f: x \mapsto \ln x$

✓ الحل

بما أن الدالة f مستمرة على $[0, +\infty[$ فإنها تقبل دالة أصلية من الشكل :

$$F(x) = \int_1^x 1 \times \ln t dt \quad \text{ونكتب} \quad F(1) = 0 \quad \text{و} \quad F: x \mapsto \int_1^x \ln t dt$$

بوضع $U'(t) = 1$ و $V(t) = \ln(t)$ نجد $V'(t) = \frac{1}{t}$ و $U(t) = t$

الدالتان U و V قابلتان للاشتقاق على $[0, +\infty[$ والدالتان المشتقتان U' و V' مستمرتان على $[0, +\infty[$ وحسب دستور التكامل بالتجزئة نجد :

$$F(x) = \int_1^x 1 \times \ln t dt = \left[t \ln t \right]_1^x - \int_1^x t \times \frac{1}{t} dt$$

$$= \left[t \ln t \right]_1^x - \int_1^x 1 dt = \left[t \ln t \right]_1^x - \left[t \right]_1^x = x \ln(x) - x + 1$$

إذن الدالة $x \mapsto x \ln(x) - x + 1$ أصلية للدالة $x \mapsto \ln x$ على المجال $[0, +\infty[$

بحيث $F(1) = 0$

لاحظ أنه إذا أضفنا -1 إلى الدالة F نحصل على دالة أصلية أخرى $x \mapsto x \ln x$ هي :

$$x \mapsto x \ln(x) - x$$

6 - تطبيقات الحساب التكاملي

1-6 حساب مساحة حيز من مستو

تعريف: التكامل لدالة مستمرة يسمح لنا بحساب مساحة حيز من مستو محدود بمتحني هذه الدالة.

خواص

(1) إذا كانت الدالة f مستمرة و موجبة على $[a, b]$ فإن مساحة حيز من المستوي

للمجموعة النقط $M(x, y)$ بحيث $b \geq x \geq a$ و $f(x) \geq y \geq 0$ هي $\int_a^b f(x) dx$

(2) إذا كانت f دالة مستمرة وسالبة على $[a, b]$ فإن مساحة حيز من المستوي

للمجموعة النقط $M(x, y)$ بحيث $b \geq x \geq a$ و $0 \geq y \geq f(x)$ هي $-\int_a^b f(x) dx$

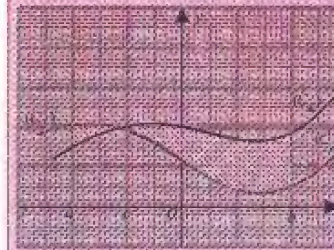
(3) إذا كان لدينا $f(x) \leq g(x)$ على $[a, b]$ فإن مساحة حيز من المستوي للمجموعة

النقط $M(x, y)$ بحيث $b \geq x \geq a$ و $f(x) \leq y \leq g(x)$ هو $\int_a^b [g(x) - f(x)] dx$

ملاحظة

- 1) لحساب المساحة المحصورة بين منحنيتين f و g على $[a, b]$ نتبع ما يلي :
- نجزئ هذا المجال إلى مجالات جزئية بحيث فرق الدالتين يحافظ على إشارة ثابتة.
- تكامل دالة الفرق ونراعي العلاقة الموجودة بين التكامل والمساحة.

$$A = - \int_a^b (g(x) - f(x)) dx + \int_a^b (g(x) - f(x)) dx$$



- 2) في معلم متعامد ومتجانس وحدة المساحة هي مساحة المربع الذي طولاه ضلعه $\|\vec{i}\|$ أما في معلم متعامد وحدة المساحة هي مساحة المستطيل الذي أبعاده $\|\vec{i}\|$ و $\|\vec{j}\|$

مثال -

- f دالة معرفة على المجال $[-1, 4]$ بحيث $f(x) = \frac{1}{2}(x^3 - 3x^2)$
- 1) ومنحنىها البياني في معلم متعامد ومتجانس.
 - 2) ارسم (γ) على المجال $[-1, 4]$.
 - 3) احسب مساحة الخيز من المستوي المحدب (γ) ومحور القواصل (x, x') و المستقيمين اللذين معادلاتهما $x=2$ و $x=4$.

الحل

- 1) الدالة f قابلة للاشتقاق على $[-1, 4]$ و لدينا $f'(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 6x)$

- $f'(x) = 0$ يكافئ $x=0$ أو $x=2$
- إذا كان $x \in [-1, 0] \cup [2, 4]$ فإن f' متزايدة تماماً.
 - إذا كان $x \in [0, 2]$ فإن f' متناقصة تماماً.
- و منه جدول تغيرات f على $[-1, 4]$ هو

x	-1	0	2	4
إشارة $f'(x)$	+	0	-	+
تغيرات f'		0	-2	8

- 2) على المجال $[2, 3]$ يكون $f(x) \leq 0$
و على المجال $[3, 4]$ يكون $f(x) \geq 0$
و منه المساحة المطلوبة

$$A = \left(- \int_2^3 f(x) dx + \int_3^4 f(x) dx \right)$$

هي الدالة الأصلية للدالة $f(x) \mapsto x$ هي

$$x \mapsto \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{2}x^3$$

$$A = - \left[\frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{2}x^3 \right]_2^3 + \left[\frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{2}x^3 \right]_3^4 = \frac{70}{8} = \frac{35}{4}$$

2-6 حساب الحجوم :

- نعتبر مجسماً Σ محبواً بالمستويين التوازيين (p_1) و (p_2) ذوي المعادلتين $Z=a$ و $Z=b$ على التوالي في معلم متعامد ومتجانس وليكن V حجم هذا الجسم و $S(Z)$ مساحة مقطع منه بالمستوي (p) الموازي لـ (p_1) و (p_2) معادلته $Z=a$ مع $b \geq a \geq a$

- حجم هذا الجسم يعطى بالعلاقة $V = \int_a^b S(z) dz$
- وحدة الحجوم هي حجم متوازي المستطيلات القائم الذي أحرافه $\|\vec{i}\|, \|\vec{j}\|, \|\vec{k}\|$

مجسم دوراني محوره (x, x')

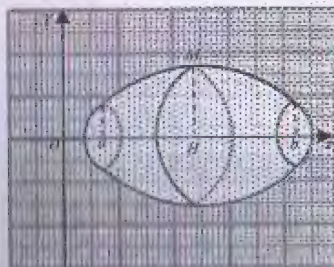
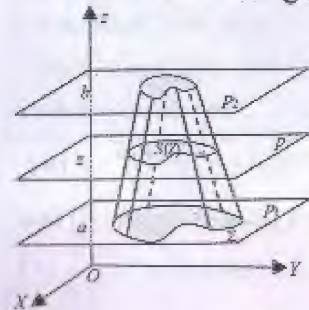
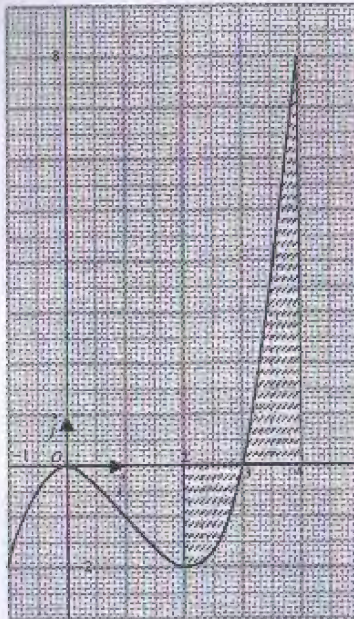
- ليكن (γ) قوس من منحنى المثل للدالة f حيث $y=f(x)$ مع $f(x) \geq 0$ على $[a, b]$.
بتدوير (γ) حول (x, x') فإن القوس (γ) يولد مساحة دوارية محورها (x, x') وهذه المساحة تحدد مجسماً دورانياً.

و مقطع هذا الجسم بمستوي عمودي

على (x, x') يعطي قرصاً مساحته πR^2

أي $\pi (f(x))^2$ حيث $M(x, f(x))$ نقطة من (γ)

$$V = \int_a^b \pi f^2(x) dx$$



ملاحظة

من أجل مجسم دوراني محوره (xx') فإن العلاقة $V = \int_a^b \omega f^2(x) dx$ تستنتج وهذا بتصورنا المحور (xx') في مكان (z, z')

مثال

أوجد الدستور الذي يعطي حجم كرة نصف قطرها R .

الحل

في معلم متعامد ومتجانس للفضاء نعتبر الكرة التي مركزها O وطول نصف قطرها R . إذا أخذنا مقطع كرة بمستوي ذي المعادلة $Z = a$ مع $a \in]-R, R[$ نحصل على دائرة مركزها Ω ينتمي إلى (zz') نصف قطرها ΩM .

و في المثلث القائم $O\Omega M$ لدينا $O\Omega^2 + \Omega M^2 = OM^2$ ومنه $\Omega M^2 = OM^2 - O\Omega^2 = R^2 - a^2$ مساحة القرص الذي مركزه Ω ونصف قطره ΩM هي:

$S(a) = \pi(R^2 - a^2)$ ومنه الحجم المطلوب هو:

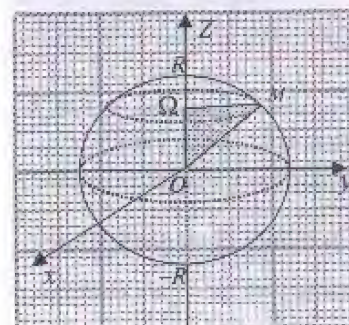
$$V = \int_{-R}^R S(z) dz = \int_{-R}^R \pi(R^2 - z^2) dz$$

الدالة $z \mapsto \pi(R^2 - z^2)$ مستمرة على $[-R, R]$ و دالتها الأصلية هي:

$$z \mapsto \pi \left(R^2 z - \frac{1}{3} z^3 \right)$$

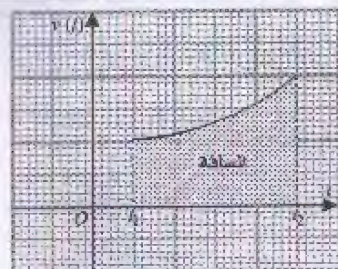
$$V = \left[\pi \left(R^2 z - \frac{1}{3} z^3 \right) \right]_{-R}^R = \pi \left(R^3 - \frac{1}{3} R^3 \right) - \pi \left(-R^3 + \frac{1}{3} R^3 \right)$$

$$= \pi \left[R^3 - \frac{1}{3} R^3 + R^3 - \frac{1}{3} R^3 \right] = \frac{4}{3} \pi R^3$$



3-6 العبارة التكاملية للمسافة المقطوعة و السرعة المتوسطة

- إذا علمنا أن السرعة اللحظية $V(t)$ لتحرك بدلالة الزمن t فإن المسافة المقطوعة $d(t_1, t_2)$ لهذا التحرك بين اللحظتين t_1 و t_2 هي:



$$d(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} V(t) dt$$

- السرعة المتوسطة V_M بين اللحظتين t_1 و t_2 هي:

$$V_M = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} V(t) dt$$

مثال

من أجل كل $t > 0$ السرعة اللحظية لتحرك هي $V(t) = \ln t$

احسب المسافة المقطوعة من طرف التحرك بين اللحظتين $t_1 = 1$ و $t_2 = 3$ ثم

احسب السرعة المتوسطة له.

الحل

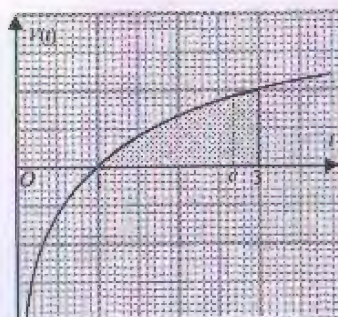
$$d(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} V(t) dt = \left[t \ln(t) - t \right]_{t_1}^{t_2}$$

$$= (3 \ln(3) - 3) - (0 - 1)$$

$$d = 3 \ln(3) - 2 \approx 1.3 m$$

$$V_M = \frac{1}{3-1} \int_1^3 \ln(t) dt$$

$$= \frac{1}{2} \times 1.3 \approx 0.65 m/s$$



تقريب تدريجي

(أ) النحنى الممثل للدالة $x \mapsto \cos x$ المعرفة على المجال $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

(ب) احسب مساحة الجير من المستوي المحدب (r) و محور القواصل.

(ج) احسب الحجم الناتج بدوران النحنى (r) حول المحور (xx')

الحل

(أ) الدالة \cos موجبة على المجال $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$$

و المساحة المطلوبة هي

الدوال الأصلية و حساب التكاملات

حسب نظرية طاليس $\frac{OH'}{OH} = \frac{OB'}{OB} = k$ وهذا يعني أن صورة B' صورة B بالتحاكي الذي مركزه O ونسبته k

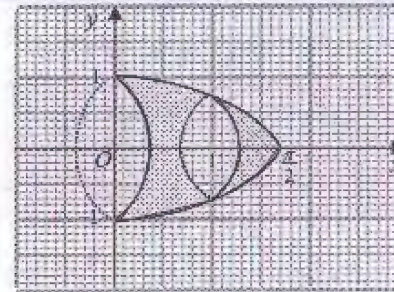
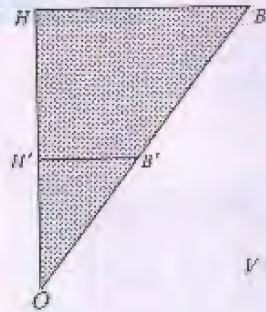
بنفس الطريقة نبين أن صورة A' صورة A و صورة C' صورة C بالتحاكي إذن المثلث $A'B'C'$ صورة المثلث ABC بالتحاكي

الذي مركزه النقطة O و نسبته $k = \frac{z}{h}$

إذا كانت S مساحة ABC و $S(z)$ مساحة $A'B'C'$

فإن $S(z) = k^2 S$ و منه $S(z) = \frac{z^2}{h^2} S$

$$V = \int_0^h S(z) dz = \int_0^h S \frac{z^2}{h^2} dz = S \int_0^h \frac{z^2}{h^2} dz = \frac{S h}{3} \quad (2)$$



$$S = \left[\sin x \right]_0^{\pi/2} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$$

(ب) الدالة \cos موجبة على $\left[0, \frac{\pi}{2} \right]$

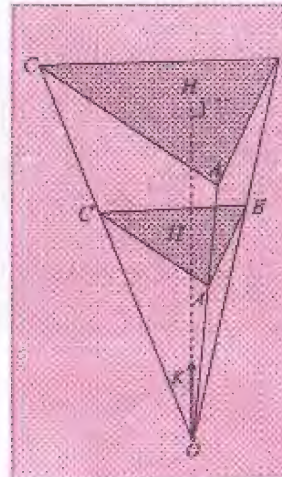
و الحجم المطلوب يساوي $\int_0^{\pi/2} \pi \cos^2 x dx$

$$\text{لدينا } \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

و منه الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto \cos^2 x$ هي الدالة F حيث:

$$V = \pi \left(F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) \right) = \pi \times \frac{1}{4} \pi = \frac{\pi^2}{4} \quad \text{إذن } F(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x \right)$$

تمرين تدريبي - 2



لنعتبر هرم $OABC$ (مثلث الأوجه) كما هو موضح في الشكل، ارتفاعه $[OH]$

حيث $OH = h$ و S مساحة القاعدة ABC

لتكن H' نقطة من المحور (O, \vec{k})

نقع داخل الهرم. و مقطع الهرم بالمستوي

الوازي للمستوي (ABC) و المار من H' هو

مثلث $A'B'C'$. نضع $OH' = z$

(1) استعمل التحاكي الذي مركزه O

لإثبات أن المساحة $S(z)$ للمقطع $A'B'C'$ هي:

$$S(z) = S \times \frac{z^2}{h^2}$$

(2) احسب حجم الهرم بدلالة S و h

✓ الحل

$$(1) \quad \frac{OH'}{OH} = \frac{z}{h} = k \quad \text{منه } OH' = k OH \quad \text{و بما أن } \vec{OH'} \text{ و } \vec{OH} \text{ لهما نفس الاتجاه}$$

فإن $\vec{OH'} = k \vec{OH}$ وهذا يعني H' صورة H بالتحاكي الذي مركزه النقطة O

و نسبته $k = \frac{z}{h}$

(و $(OH') \perp (H'B')$ و $(HB) \perp (OH)$)



تطبيقات نموذجية

1 تطبيق

حساب تكامل دالة درجية

(1) مثل الدالة الدرجية f ثم احسب التكامل $I(f)$ على $[-2, 3]$

$$\begin{cases} f(x) = -\frac{1}{2}, & x \geq -2 \\ f(x) = +1, & 3 \geq x \geq 0 \end{cases} \quad \text{حيث}$$

(2) مثل الدالة f المعرفة على $[0, 3]$ بـ $f(x) = E(x) - x$ حيث E دالة الجزء الصحيح ثم احسب التكامل $I(f)$ على المجال $[0, 3]$

✓ الحل

الدالة f سالبة على المجال $[-2, 0]$ ومثلته $I(f)$

هو نظير مساحة المستطيل الذي أبعاده 2 و $\frac{1}{2}$

$$I(f) = -2 \times \frac{1}{2} = -1$$

الدالة f موجبة على المجال $[0, 3]$

ومثلته $I(f)$ يساوي مساحة المستطيل الذي أبعاده 3 و 1 أي $I(f) = 1 \times 3 = 3$
تكاملي الدالة f على المجال $[-2, 3]$ هو المجموع الجبري للتكاملات المحصل عليها سابقا
أي $3 - 1 = +2$

$$\begin{cases} f(x) = -x, & x \in [0, 1] \\ f(x) = 1 - x, & x \in [1, 2] \\ f(x) = 2 - x, & x \in [2, 3] \end{cases} \quad (2)$$

- الدالة f سالبة على المجال $[0, 1]$

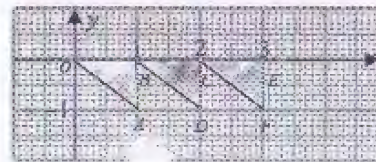
وبالتالي فإن $I(f)$ يساوي -1 على $[0, 1]$

- الدالة f سالبة على المجال $[1, 2]$

وبالتالي $I(f)$ يساوي -1

- الدالة f سالبة على المجال $[2, 3]$ وبالتالي فإن $I(f)$ يساوي -1

وعليه فالتكامل f على $[0, 3]$ هو المجموع الجبري للتكاملات المحصل عليها سابقا أي
 $-1 - 1 - 1 = -3$



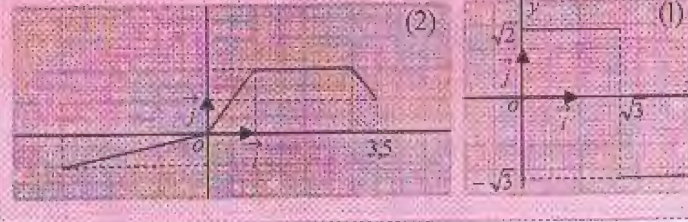
2 تطبيق

حساب تكامل دالة درجية و تكامل دالة تألفية بالقطع

(1) الشكل (1) يمثل التمثيل البياني لدالة درجية

عين عبارة $f(x)$ ثم احسب التكامل f على مجال تعريفها.

(2) الشكل (2) يمثل المنحنى البياني لدالة تألفية بالقطع. احسب التكامل $I(f)$ باستعمال المساحة



✓ الحل

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{2}, & x \geq 0 \\ f(x) = -\sqrt{3}, & 3 \geq x \geq \sqrt{3} \end{cases} (1)$$

f موجبة على المجال $[0, \sqrt{3}]$ وبالتالي $I(f)$ يساوي مساحة المستطيل الذي أبعاده

$$\sqrt{2} \text{ و } \sqrt{3} \text{ منه } I(f) = \sqrt{6}$$

f سالبة على المجال $[\sqrt{3}, 3]$ وبالتالي $I(f)$ هو نظير مساحة المستطيل الذي

$$\text{أبعاده } (3 - \sqrt{3}) \text{ و } \sqrt{3} \text{ وبالتالي } I(f) = -\sqrt{3}(3 - \sqrt{3})$$

إذن تكامل f على $[0, 3]$ يساوي المجموع الجبري للتكاملات المحصل عليها سابقا أي

$$I(f) = [\sqrt{6} - \sqrt{3}(3 - \sqrt{3})]$$

(2) - الدالة f سالبة على المجال $[-3, 0]$ وبالتالي فإن $I(f)$ هو نظير مساحة المثلث التي

$$\text{تساوي } \frac{3}{2} \text{ منه } I(f) = -\frac{3}{2}$$

- الدالة f موجبة على المجال $[0, 3]$ وبالتالي فإن التكامل $I(f)$ هو مساحة شبه

المخروط الذي طول قاعدته الكبرى 3 والصغرى 2 وارتفاعه 2 و تساوي

$$\frac{(3+2) \times 2}{2} = 5$$

$$\text{إذن } I(f) = 5$$

- الدالة f موجبة على المجال $[3, 5]$ وبالتالي فإن التكامل $I(f)$ هو مساحة مثلث

$$\text{الذي قاعدته } 0.5 \text{ وارتفاعه } 1 \text{ و تساوي } \frac{1 \times 0.5}{2} = \frac{1}{4} \text{ ومنه } I(f) = \frac{1}{4}$$

إذن التكامل $I(f)$ على المجال $[-3, 3, 5]$ هو المجموع الجبري للتكاملات المحصل عليه سابقاً و تساوي $-\frac{3}{2} + 5 + \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$

تطبيق 3

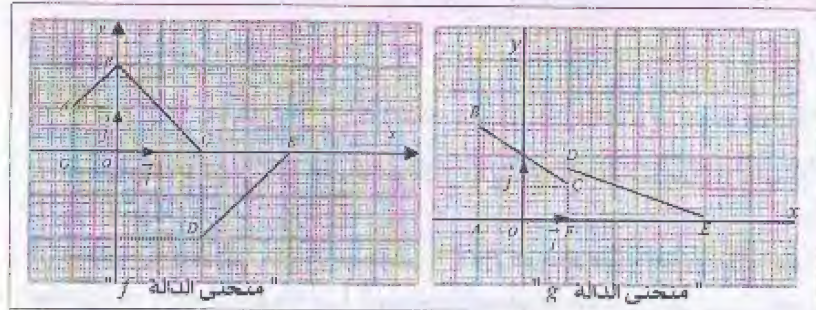
حساب تكامل دالة تألفية بالقطع

f و g دالتان تألفتان بالقطع معرفتان على المجال $[-1, 4]$

$$\begin{cases} g(x) = -\frac{1}{2}x + 1 & x \in [-1, 1] \\ g(x) = -\frac{1}{4}x + 1 & x \in [1, 4] \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} f(x) = x + 2 & x \in [-1, 0] \\ f(x) = -x + 2 & x \in [0, 2] \\ f(x) = x - 4 & x \in [2, 4] \end{cases}$$

احسب تكاملي f و g على $[-1, 4]$

✓ الحل



- الدالة f موجبة على $[-1, 0]$ وبالتالي فإن $I(f)$ يساوي مساحة شبه المنحرف $OBAI$ التي تساوي 1.5 ومنه $I(f) = 1.5$.

- الدالة f موجبة على المجال $[0, 2]$ وبالتالي فإن $I(f)$ يساوي مساحة المثلث OBC التي تساوي 2 ومنه $I(f) = 2$.

- الدالة f سالبة على المجال $[2, 4]$ وبالتالي فإن $I(f)$ هو نظير مساحة المثلث CDE التي تساوي 2 ومنه $I(f) = -2$.

إذن تكامل f على $[-1, 4]$ هو المجموع الجبري للتكاملات وعليه $I(f) = \frac{3}{2} - 2 = -\frac{1}{2}$.

- الدالة g موجبة على $[-1, 1]$ وبالتالي فإن $I(g)$ يساوي مساحة شبه المنحرف $ABCF$ والتي تساوي 2.25 ومنه $I(g) = 2.25$.

- الدالة g موجبة على المجال $[1, 4]$ وبالتالي $I(g)$ هي مساحة المثلث DIE والتي تساوي $\frac{3}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{8}$ ومنه $I(g) = \frac{9}{8}$ إذن تكامل g على $[-1, 4]$ هو $2.25 + \frac{9}{8} = \frac{27}{8}$.

تطبيق 4

حساب تكامل دالة تألفية

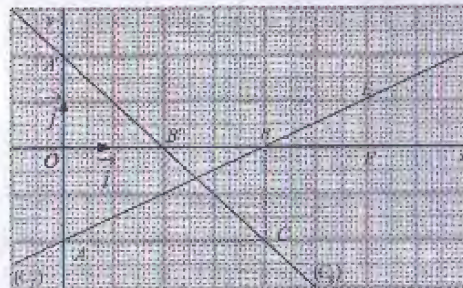
الدالتان f و g معرفتان على \mathbb{R} ب $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$ و $g(x) = 2 - x$

(1) ارسم (C_f) و (C_g) في معلم متعامد ومتجانس

(2) باستعمال حساب المساحات احسب التكاملات التالية $\int_0^2 g(x) dx$

$$\int_{-4}^6 f(x) dx, \int_0^4 f(x) dx, \int_{-2}^4 g(x) dx$$

✓ الحل



(1) للنحني الممثل للدالة f عبارة عن مستقيم يمر من النقط $A(0, -2)$ و $B(4, 0)$ و $E(6, 1)$

النحني الممثل للدالة g عبارة عن مستقيم يمر من النقط $A'(0, 2)$ و $B'(2, 0)$ و $C(4, -2)$

(2) الدالة f موجبة ومستمرة على $[4, 6]$

وبالتالي فإن تكامل f على $[4, 6]$ يساوي مساحة المثلث BEE ومنه $\int_4^6 f(x) dx = 1$

- الدالة f سالبة ومستمرة على المجال $[0, 4]$

وبالتالي فإن تكامل f على $[0, 4]$ هو نظير مساحة المثلث OBA التي تساوي 4

$$\int_0^4 f(x) dx = -4 \quad \text{إذن}$$

- الدالة g معرفة وموجبة على $[0, 2]$ وبالتالي فإن تكامل g على $[0, 2]$

يساوي مساحة المثلث OBA' التي تساوي 2 إذن $\int_0^2 g(x) dx = 2$

- الدالة g سالبة على المجال $[2, 4]$ وبالتالي فإن تكامل g على $[2, 4]$ هو نظير

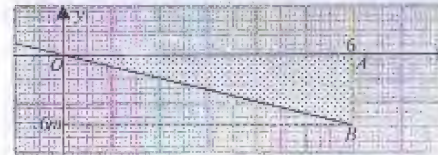
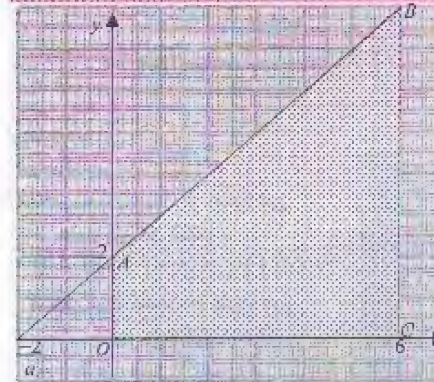
مساحة المثلث BBC التي تساوي 2

$$\int_2^4 g(x) dx = -2 \quad \text{إذن}$$

تطبيق 5

المهمة تعيين دالة علم تكاملها

- (1) أوجد دالة تاليفية p بحيث $p: x \mapsto ax+2$ مع $a > 0$ التي تكاملها على المجال $[0, 6]$ هي 16
 (2) أوجد الدالة التاليفية q بحيث $q: x \mapsto mx$ التي تكاملها على المجال $[0, 6]$ يساوي -8 مع $m < 0$



- (1) بما أن p موجبة على $[0, 6]$ فإن تكامل p على $[0, 6]$ يساوي مساحة شبه النحرف OAB والتي تساوي

$$\frac{(2+6a+2) \times 6}{2} = 18a+12$$
 وبالتالي $18a+12=16$ منه نستنتج
 $a = \frac{2}{9}$ إذن $p(x) = \frac{2}{9}x+2$
 (2) بما أن q سالبة على المجال $[0, 6]$ فإن تكامل q على $[0, 6]$ هو نظير مساحة المثلث OAB التي تساوي $18|m|$ وبالتالي $18|m| = -(-8)$ أي $|m| = \frac{4}{9}$ ومنه $m = -\frac{4}{9}$

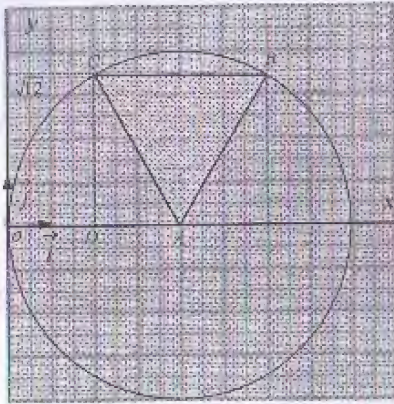
تطبيق 6

المهمة حساب التكامل بالاعتماد على مساحة قرص

- (1) بين أن الدائرة (C) التي مركزها النقطة $A(4, 0)$ والمارة من مبدأ العلم تكتب على الشكل $(x-4)^2 + y^2 = 16$
 (2) نعتبر النقطتين B و C من الدائرة (C) فاصلتهما 5 و 3 على الترتيب و بحيث ترتقيها موجبة. بين أن المثلث ABC متقايس الأضلاع.
 (3) استنتج التكاملين التاليين و هذا باستعمال المساحات:

$$J = \int_{-2}^6 \sqrt{8x-x^2} dx \quad ; \quad I = \int_0^8 \sqrt{8x-x^2} dx$$

الحل



- (1) الدائرة التي مركزها A و تمر من O هي مجموعة النقط M من المستوي بحيث $AM=OA$
 وبما أن $OA=4$ فإن $AM=4$ و عليه $(x-4)^2 + y^2 = 16$
 $OB=4$ و $OC=4$ (2)
 لأن B و C نقطتان من الدائرة (C) ترتيب كل من B و C هو $\sqrt{12}$ ومنه $BC = \sqrt{(6-2)^2 + 0^2} = 4$ ومنه المثلث ABC متقايس الأضلاع.

$$I = \int_0^8 \sqrt{8x-x^2} dx \quad \text{حساب (3)}$$

الدالة $x \mapsto \sqrt{8x-x^2}$ موجبة على المجال $[0, 8]$ و بالتالي فإن تكامل f على $[0, 8]$ يساوي مساحة نصف القرص الذي مركزه A و نصف قطره 4 و التي تساوي $\frac{1}{2} \pi \times 4^2$ أي 8π

$$I = \int_0^8 \sqrt{8x-x^2} dx = 8\pi$$

$$J = \frac{I}{3} + 2 \times (\text{مساحة } ACD)$$

$$J = \frac{8\pi}{3} + 2 \times \frac{2 \times \sqrt{12}}{2} = \frac{8\pi}{3} + 2\sqrt{12} = \frac{8\pi}{3} + 4\sqrt{3}$$

تطبيق 7

المهمة حساب التكامل باستعمال القطبية

$$(1) \text{ إذا علمت أن } \int_0^3 f(x) dx = 3 \text{ و } \int_0^3 g(x) dx = -3 \text{ احسب مايلي:}$$

$$I = \int_0^3 (2f(x) - 3g(x)) dx \quad ; \quad J = \int_0^3 \frac{1}{5} g(x) dx \quad ; \quad K = \int_0^3 4f(x) dx$$

$$(2) \text{ من أجل كل } x \text{ من المجال } \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \text{ فإن بين } \sin x \text{ و } \cos x$$

$$\text{ثم بين } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx \text{ و } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx$$

✓ الحل

$$J = \frac{1}{5} \int_0^3 g(x) dx = \frac{1}{5} (-3) = -\frac{3}{5} \quad \text{و} \quad I = 4 \int_0^3 f(x) dx = 4(3) = 12 \quad (1)$$

$$K = 2 \int_0^3 f(x) dx - 3 \int_0^3 g(x) dx = 2I - 3J = 15$$

$$(2) \text{ من أجل كل } x \text{ من }]0, \frac{\pi}{4}[\text{ لدينا } \sin x < \cos x \text{ وبالتالي } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx > \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx$$

تطبيق 8

المقارنة بين تكاملين

قارن بين العددين الحقيقيين I و J وذلك بدون حساب قيمتهما في كل حالة من الحالات التالية :

$$(1) \quad J = \int_{\frac{1}{2}}^1 x \ln x \quad \text{و} \quad I = \int_{\frac{1}{2}}^1 x^2 dx \quad \text{ب) } J = \int_0^1 x^2 e^x dx \quad \text{و} \quad I = \int_0^1 x e^x dx$$

$$(ج) \quad J = \int_0^1 \frac{t}{2+t} dt \quad \text{و} \quad I = \int_0^1 \frac{t}{1+t} dt$$

✓ الحل

(1) من أجل كل x من $[0, 1]$ يكون $x^2 \leq x$ بالضرب في e^x نجد $x^2 e^x \leq x e^x$ ومنه

$$\int_0^1 x^2 e^x dx \leq \int_0^1 x e^x dx \quad \text{إذن } J \leq I$$

(ب) من أجل كل x من $[\frac{1}{2}, 1]$ يكون $x < \ln x$ بالضرب في x نجد $x \ln x < x^2$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 x \ln x < \int_{\frac{1}{2}}^1 x^2 dx \quad \text{إذن } J < I$$

(ج) من أجل كل t من $[0, 1]$ يكون $1+t < 2+t$ وبالقلب نجد $\frac{1}{1+t} > \frac{1}{2+t}$

$$\int_0^1 \frac{t}{1+t} dt > \int_0^1 \frac{t}{2+t} dt \quad \text{بالمرور إلى التكامل نجد } \frac{t}{1+t} > \frac{t}{2+t}$$

إذن $J > I$.

تطبيق 9

إثبات متباينات

برهن المتباينات التالية :

$$\frac{9}{2} \leq \int_0^3 x \sqrt{1+x} dx \leq 9 \quad \text{ب) } 1 \leq \int_0^4 \frac{1}{2+\sqrt{t}} dt \leq 2 \quad (1)$$

$$2 \ln 2 \leq \int_1^3 \ln(x^2+1) dx \leq 2 \ln 10 \quad \text{د) } \frac{1}{3} \leq \int_0^1 \frac{1}{2+t^2} dt \leq \frac{1}{2} \quad (ج)$$

✓ الحل

(1) من أجل كل t من $[0, 4]$ يكون $2 \geq \sqrt{t} \geq 0$ بإضافة 2 إلى طرفي المتباينة نجد :

$$4 \geq 2 + \sqrt{t} \geq \frac{1}{4} \quad \text{بالقلب نجد } \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2+\sqrt{t}} \geq \frac{1}{4}$$

$$2 \geq \int_0^4 \frac{1}{2+\sqrt{t}} dt \geq 1 \quad \text{أي } \int_0^4 \frac{1}{2} dt \geq \int_0^4 \frac{1}{2+\sqrt{t}} dt \geq \int_0^4 \frac{1}{4} dt$$

(ب) بما أن $3 \geq x \geq 0$ فإن $2 \geq \sqrt{1+x} \geq 1$ بالضرب في x نجد :

$$2x \geq x \sqrt{1+x} \geq x \quad \text{بالمرور إلى التكامل نجد}$$

$$9 \geq \int_0^3 x \sqrt{1+x} dx \geq \frac{9}{2} \quad \text{أي } \int_0^3 2x dx \geq \int_0^3 x \sqrt{1+x} dx \geq \int_0^3 x dx$$

(ج) من أجل كل t من $[0, 1]$ لدينا $\frac{1}{2} \geq \frac{1}{2+t^2} \geq \frac{1}{3}$ وبالمرور إلى التكامل نجد :

$$\frac{1}{2} \geq \int_0^1 \frac{1}{2+t^2} dt \geq \frac{1}{3} \quad \text{منه نجد } \int_0^1 \frac{1}{2} dt \geq \int_0^1 \frac{1}{2+t^2} dt \geq \int_0^1 \frac{1}{3} dt$$

(د) من أجل كل x من $[1, 3]$ لدينا $10 \geq x^2+1 \geq 2$ ومنه ينتج :

$$\ln 10 \geq \ln(x^2+1) \geq \ln 2$$

$$\text{بالمرور إلى التكامل نجد } 2 \ln 10 \geq \int_1^3 \ln(x^2+1) dx \geq 2 \ln 2$$

تطبيق 10

حصر تكامل دالة

$$I = \int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{1+x} dx$$

(1) بدراسة تغيرات الدالتين K و f على المجال $[0, 1]$ بحيث :

(ب) المتباينة (2) تصبح $1-x \leq \frac{e^{-x^2}}{1+x} \leq 1-x + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2(1+x)}$

بالتبسيط نجد $1-x \leq \frac{e^{-x^2}}{1+x} \leq \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2(1+x)} + \frac{1}{2}$ وبالمرور إلى

التكامل نجد $\int_0^1 (1-x) dx \leq \int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{1+x} dx \leq \int_0^1 \left[\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2(1+x)} + \frac{1}{2} \right] dx$ ، منه نستنتج:

$$\left[x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 \leq \int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{1+x} dx \leq \left[\frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}Ln(x+1) + \frac{1}{2}x \right]_0^1$$

$$\frac{1}{2} \leq I \leq \frac{5}{24} + \frac{1}{2} Ln(2) \quad \text{إذن} \quad \frac{1}{2} \leq \int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{1+x} dx \leq \frac{5}{24} + \frac{1}{2} Ln(2)$$

تطبيق 1

دراسة تقارب متتالية معرفة بواسطة التكامل

$$I_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x} dx \quad \text{كما يلي}$$

(1) احسب I_1 ثم $I_0 + I_1$ واستنتج I_0

(ب) من أجل كل عدد طبيعي n احسب $I_n + I_{n+1}$

(2) برهن أنه من أجل كل x من $[0, 1]$

$$\frac{e^{nx}}{1+e} \leq \frac{e^{nx}}{1+e^x} \leq \frac{e^{nx}}{2}$$

ثم أعط حصرًا لـ I_n

(3) استنتج نهاية كل من المتتاليتين (I_n) و $\left(\frac{I_n}{e^n}\right)$

الحل

$$(1) \text{ من أجل } n=1 \text{ لدينا } I_1 = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx$$

بوضع $u(x) = e^x + 1$ نجد $u'(x) = e^x$ منه:

$$I_1 = \int_0^1 \frac{u'(x)}{u(x)} dx = [Ln(u(x))]_0^1 = [Ln(e^x + 1)]_0^1 = Ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$$

$$I_0 + I_1 = \int_0^1 \frac{1}{e^x + 1} dx + \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+e^x} + \frac{e^x}{1+e^x} \right) dx = \int_0^1 1 dx = 1$$

$h(x) = e^{-x} + x - 1$ و $K(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - e^{-x}$ بين أنه من أجل كل x من

$[0, 1]$ يكون $1 - x \leq e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2}$... (1)

(2) استنتج حصرًا لـ e^{-x^2} لـ x ينتمي إلى $[0, 1]$ ثم بين أنه من أجل

كل x من $[0, 1]$ يكون $1 - x \leq \frac{e^{-x^2}}{1+x} \leq 1 - x + \frac{x^4}{2(1+x)}$... (2)

(3) استنتج أنه من أجل كل x من $[0, 1]$:

$$\frac{x^4}{1+x} = x^3 - x^2 + x - 1 + \frac{1}{1+x}$$

(ب) استنتج من المتباينة (2) أن $\frac{1}{2} \leq I \leq \frac{5}{24} + \frac{Ln 2}{2}$

الحل

(1) h قابلة للاشتقاق على $[0, 1]$ ولدينا $h(x) = -e^{-x} + 1$

الدالة K قابلة للاشتقاق على $[0, 1]$ ولدينا $K'(x) = h(x)$

وبما أن $h(x) \geq 0$ فإن $K'(x) \geq 0$

ومنه فإن الدالة K متزايدة تمامًا على $[0, 1]$.

x	0	1
$K'(x)$	0	+
$K(x)$		$\frac{1}{2} - \frac{1}{e}$

x	0	1
$h(x)$	0	+
$h(x)$		$\frac{1}{e}$

$h(x) > 0$ يكافئ $e^{-x} \geq 1 - x$... (*)

$K(x) > 0$ يكافئ $e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2}$... (**)

من (*) و (**) نجد $1 - x \leq e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2}$... (1)

(2) بما أن x ينتمي إلى $[0, 1]$ فإن $x^2 \in [0, 1]$ وباستبدال x^2 بـ x في المتباينة (1)

نجد $1 - x^2 \leq e^{-x^2} \leq 1 - x^2 + \frac{x^4}{2}$ بالقسمة على $1+x$ نجد:

$$(2) \dots 1 - x \leq \frac{e^{-x^2}}{1+x} \leq 1 - x + \frac{x^4}{2(1+x)}$$

(3) بعد إنجاز القسمة الإقليدية لـ x^4 على $1+x$ نجد $\frac{x^4}{1+x} = x^3 - x^2 + x - 1 + \frac{1}{1+x}$

$$I_0 = 1 - \ln\left(\frac{e+1}{2}\right) = \ln\left(\frac{2e}{e+1}\right) \quad \text{فإن} \quad I_1 = \ln\left(\frac{e+1}{2}\right) \quad \text{و} \quad I_0 + I_1 = 1$$

$$I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x} dx + \int_0^1 \frac{e^{(n+1)x}}{1+e^x} dx = \int_0^1 \frac{e^{nx} + e^{(n+1)x}}{1+e^x} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{e^{nx}(1+e^x)}{1+e^x} dx = \int_0^1 e^{nx} dx = \left[\frac{1}{n} e^{nx} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{n} e^n - \frac{1}{n} = \frac{1}{n} (e^n - 1)$$

(2) من أجل كل x من $[0, 1]$ لدينا $e \geq e^x \geq 1$ ومنه $e+1 \geq e^x + 1 \geq 2$

بالقلب نجد $\frac{1}{e+1} \leq \frac{1}{e^x+1} \leq \frac{1}{2}$ بالضرب في e^{nx} نجد،

$$(1) \dots \frac{e^{nx}}{e+1} \leq \frac{e^{nx}}{e^x+1} \leq \frac{e^{nx}}{2}$$

بمكاملة حدود التباينة (1) نجد $\left[\frac{1}{n(1+e)} e^{nx} \right]_0^1 \leq I_n \leq \left[\frac{1}{2n} e^{nx} \right]_0^1$ بالحساب

$$(2) \dots \frac{1}{n(1+e)} (e^n - 1) \leq I_n \leq \frac{1}{2n} [e^n - 1]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^n - 1}{n(e+1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^n(1 - e^{-n})}{n(e+1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^n}{n} \right) \left(\frac{1 - e^{-n}}{e+1} \right) = +\infty \quad (3)$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-n}}{e+1} = \frac{1}{e+1} \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^n}{n} = +\infty \right)$$

وحسب نظرية الحصر فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} I_n = +\infty$

- بقسمة طرفي التباينة (2) على e^n نجد $\frac{1}{n(e+1)} \times \frac{e^n - 1}{e^n} \leq \frac{I_n}{e^n} \leq \frac{e^n - 1}{e^n} \times \frac{1}{2n}$

$$\text{بما أن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^n - 1}{e^n} = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n} = 0 \quad \text{فإن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{I_n}{e^n} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{I_n}{e^n} \right) = 0 \quad \text{وحسب نظرية الحصر فإن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^n - 1}{e^n} \times \frac{1}{2n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^n - 1}{e^n} \times \frac{1}{n(e+1)} = 0$$

تطبيق 12 دراسة تقارب متتالية معرفة بواسطة التكامل

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n \cos 2x dx \quad \text{نضع} \quad n \quad \text{عدد طبيعي}$$

(1) بين أن $0 \leq I_n \leq \left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}$ (ب) استنتج نهاية التتالية (I_n) .

✓ الحل

(1) من أجل كل عدد حقيقي x من $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ يكون $0 \leq \cos 2x \leq 1$ و $2x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\text{ومنه} \quad 0 \leq x^n \cos 2x \leq x^n \quad \text{بالمرور إلى التكامل نجد:} \quad 0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n \cos 2x dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n dx$$

$$\text{لكن} \quad 0 < \frac{1}{n+1} \leq 1 \quad \text{و} \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n dx = \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{n+1} \left(\frac{\pi}{4} \right)^{n+1}$$

$$\text{ومنه} \quad 0 \leq I_n \leq \left(\frac{\pi}{4} \right)^{n+1} \quad \text{إذن} \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n dx \leq \left(\frac{\pi}{4} \right)^{n+1}$$

(ب) بما أن $0 < \left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1} \rightarrow 0$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1} = 0$ وبالتالي حسب نظرية الحصر نجد: $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$

تعيين دالة أصلية لدالة

(1) بين أن الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بـ $f(x) = 3[\cos(3x+2)] + x$ تقبل

دالة أصلية F معرفة بـ $F(x) = \sin(3x+2) + 3\frac{x^2}{2} + 10$

(ب) أوجد الدالتين أصليتين الأخرتين للدالة f .

(2) بين أن الدالة g المعرفة على $]0, +\infty[$ بـ $g(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$ تقبل دالة

أصلية G بحيث $G(x) = \ln(x+1) + \frac{1}{x+1}$

(ب) دالة معرفة بـ $H(x) = \ln(7x+7) + \frac{x+2}{x+1}$

هل H دالة أصلية لـ g ؟

✓ الحل

(1) (أ) دالة أصلية لـ f على \mathbb{R} إذا وفقط إذا كان من أجل كل x من \mathbb{R} : $F'(x) = f(x)$

الدالة F قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ولدينا $F'(x) = 3\cos(3x+2) + 3x = f(x)$

منه F دالة أصلية للدالة f على \mathbb{R} .

(ب) جميع الدوال الأصلية للدالة f على \mathbb{R} هي من الشكل $F+k$ حيث k ثابت حقيقي

و عليه فإن الدالتين $x \mapsto F(x)+1$ و $x \mapsto F(x)+2$ أصليتان لـ f .

(1) G دالة أصلية لـ g على المجال $]0, +\infty[$ إذا وفقط إذا كانت $G'(x) = g(x)$

الدالة G قابلة للاشتقاق على المجال $]0, +\infty[$ ولدينا $G'(x) = g(x)$ منه G دالة أصلية للدالة g على المجال $]0, +\infty[$

(ب) الدالة H قابلة للاشتقاق على المجال $]0, +\infty[$ ولدينا $H'(x) = g(x)$ منه H دالة أصلية للدالة g على المجال $]0, +\infty[$

تطبيق 14

تعيين دالة أصلية لدالة مستمرة

(1) عين دالة أصلية للدالة f في كل حالة من الحالات التالية

(أ) $f(x) = 3x^5 + x^4 + x$ (ب) $f(x) = \frac{2x^3 + x^2 - 1}{x^2}$

(ج) $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2}$ (د) $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

(2) عين الدالة الأصلية G للدالة g في كل حالة من الحالات التالية :

(أ) $g(x) = \frac{2x-1}{(x^2-x)^3}$ على $]1, +\infty[$ (ب) $g(x) = 3(2x-3)^6$ على \mathbb{R}

(ج) $g(x) = \sin x \cos x$ على \mathbb{R} (د) $g(x) = \frac{5}{(-3x+1)^3}$ على $]-\infty, \frac{1}{3}[$

(هـ) $g(x) = \frac{3}{2x-1}$ على المجال $]\frac{1}{2}, +\infty[$

✓ الحل

(1) لتكن F دالة أصلية للدالة f على I .

(أ) $F(x) = \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^2$

(ب) يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل $f(x) = 2x + 1 - \frac{1}{x^2}$

الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ هي الدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ وبالتالي $F(x) = x^2 + x + \frac{1}{x}$

(ج) يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل $f(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$

الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ على \mathbb{R}^* هي $x \mapsto \ln|x|$ والدالة الأصلية للدالة $x \mapsto \frac{1}{x^2}$

على \mathbb{R}^* هي الدالة $x \mapsto -\frac{1}{x}$ ومنه $F(x) = x + \ln|x| - \frac{1}{x}$

(د) $f(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$ حيث $u(x) = x^2 - 1$ وبالتالي $F(x) = 2\sqrt{u(x)} = 2\sqrt{x^2 - 1}$

(2) $g(x) = (2x-1)(x^2-x)^{-3}$

حيث $g(x) = u'(x) \times (u(x))^{-3}$ حيث $u(x) = x^2 - x$ ومنه فإن الدالة G معرفة بـ

$G(x) = \frac{u(x)^{-2}}{-2} = \frac{-1}{2} \times \frac{1}{(x^2-x)^2}$

(ب) يمكن كتابة $g(x)$ على الشكل $g(x) = \frac{3}{2} \times u'(x)(u(x))^3$ حيث $u(x) = 2x-3$

الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto u'(x)(u(x))^3$ هي الدالة $x \mapsto \frac{1}{4}(u(x))^4$ أي $x \mapsto \frac{1}{4}(2x-3)^4$

و منه فإن الدالة الأصلية للدالة g هي G حيث $G(x) = \frac{3}{8}(2x-3)^4$

(ج) $g(x) = \sin x \cos x$ ومنه $g(x) = \frac{1}{2} \sin(2x)$

الدالة الأصلية للدالة g هي الدالة G حيث $G(x) = -\frac{1}{4} \cos(2x)$

(د) يمكن كتابة $g(x)$ على الشكل $g(x) = 5(-3x+1)^{-3}$

بوضع $u(x) = -3x+1$ نجد $u'(x) = -3$ ومنه $g(x) = \frac{-5}{3} u'(x)(u(x))^{-3}$

الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto u'(x)(u(x))^{-3}$ هي الدالة $x \mapsto \frac{-1}{2}(u(x))^{-2}$

و منه فإن الدالة الأصلية G للدالة g معرفة بـ $G(x) = \frac{5}{6(-3x+1)^2}$

(هـ) بوضع $u(x) = 2x-1$ نجد $u'(x) = 2$ منه $g(x)$ تكتب على الشكل $g(x) = \frac{3}{2} \frac{u'(x)}{u(x)}$

الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ هي $x \mapsto \ln(2x-1)$

و منه فإن الدالة الأصلية G للدالة g معرفة بـ $G(x) = \frac{3}{2} \ln(2x-1)$

تطبيق 15

تعيين دالة أصلية تحقق شرط معطى

أوجد الدالة الأصلية F للدالة f على مجال I يطلب تعيينه.

(أ) $f(x) = x^2 - 3x - 1$ و $F(0) = 0$ (ب) $f(x) = \frac{1}{x^2} + x$ و $F(1) = 0$

(ج) $f(x) = \sin\left(4x - \frac{\pi}{4}\right)$ و $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ (د) $f(x) = \frac{-1}{2-x}$ و $F(1) = 1$

✓ الحل

(أ) الدالة f معرفة ومستمرة على \mathbb{R} ودوالها الأصلية هي $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - x + k$ $F(0) = 0$ يكافئ $k = 0$ ومنه الدالة الأصلية للدالة f هي $x \mapsto \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - x$ (ب) الدالة f معرفة ومستمرة على $]0, +\infty[$ ودوالها الأصلية على هذا المجال هي:

$$F(x) = -\frac{1}{x} + \frac{x^2}{2} + k$$

 $F(1) = 0$ يكافئ $k = \frac{1}{2}$ ومنه الدالة الأصلية هي $x \mapsto -\frac{1}{x} + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}$ (ج) الدالة f معرفة ومستمرة على \mathbb{R} ودوالها الأصلية من الشكل:

$$F(x) = -\frac{1}{4} \cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) + k$$

$$k = \frac{\sqrt{2}}{8} \text{ يكافئ } F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

ومنه الدالة الأصلية هي $x \mapsto -\frac{1}{4} \cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{8}$ (د) الدالة f معرفة ومستمرة على المجال $] -\infty, 2[$ ودوالها الأصلية هي:

$$F(x) = \ln(2-x) + k$$

 $F(1) = 1$ يكافئ $k = 1$ ومنه الدالة الأصلية التي تحقق الشرط هي $x \mapsto \ln(2-x) + 1$

تطبيق 16

تعيين دالة أصلية لدالة مستمرة

أوجد دالة أصلية F للدالة f على المجال المعطى في كل حالة من الحالات التالية

$$I = \mathbb{R}, \quad f(x) = 3e^{-2x+1} \quad (1)$$

$$I =]-2, +\infty[\quad f(x) = \sqrt{x+2} + \frac{x}{2\sqrt{x+2}} \quad (ب)$$

$$I =]1, +\infty[\quad f(x) = \frac{1}{x \ln x} \quad (ج)$$

$$I = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\quad f(x) = 1 + \frac{1}{\tan^2 x} \quad (د)$$

$$I = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\quad f(x) = \tan^2 x \quad (هـ)$$

$$I =]2, +\infty[\quad f(x) = \frac{1}{(x-2)^2} e^{\frac{x+1}{x-2}} \quad (و)$$

$$I =]0, +\infty[\quad f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad (ي)$$

✓ الحل

(أ) نضع $u(x) = -2x+1$ منه $u'(x) = -2$ عندها $f(x) = \frac{-3}{2} u'(x) e^{u(x)}$ ومنه الدالة الأصلية للدالة f هي الدالة F المعرفة بـ $F(x) = \frac{-3}{2} e^{u(x)} = \frac{-3}{2} e^{-2x+1}$ (ب) نضع $u(x) = x$ و $v(x) = \sqrt{x+2}$ عندها $u'(x) = 1$ و $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}$ بالتالي $f(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$ و عليه فإن الدالة الأصلية للدالة f هي الدالة

$$F(x) = x\sqrt{x+2} \text{ أي } F(x) = (u \times v)(x) \text{ المعرفة بـ}$$

(ج) يمكن كتابة $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ وبوضع $u(x) = \ln x$ نجد $u'(x) = \frac{1}{x}$ ومنه $f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ و عليه فإن الدالة الأصلية للدالة f على $]1, +\infty[$

$$\text{هي } F(x) = \ln(u(x)) \text{ أي } F(x) = \ln(\ln x)$$

(د) من أجل كل x من I لدينا $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x$ ومنه $f(x) = \frac{1 + \tan^2 x}{\tan^2 x} = (\tan x)' \times \tan^{-2} x = u'(x)u^{-2}(x)$ حيث $u(x) = \tan x$ و عليه فإن الدالة الأصلية للدالة f هي الدالة F المعرفة بـ $F(x) = -\frac{1}{u(x)}$

$$\text{أي } F(x) = -\frac{1}{\tan x}$$

(هـ) لدينا $f(x) = \tan^2 x$ ولدينا $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x$ ومنه $\tan^2 x = (\tan x)' - 1$ وبالتالي $f(x) = (\tan x)' - 1$ إذن الدالة الأصلية للدالة f هي الدالة F المعرفة بـ $F(x) = \tan(x) - x$ (و) بوضع $u(x) = \frac{x+1}{x-2}$ نجد $u'(x) = \frac{-3}{(x-2)^2}$ ومنه $f(x) = \frac{1}{-3} (u'(x))e^{u(x)}$ و عليه فالدالة الأصلية للدالة f هي الدالة F المعرفة بـ $F(x) = \frac{-1}{3} e^{u(x)}$

$$\text{أي } F(x) = -\frac{1}{3} e^{\frac{x+1}{x-2}}$$

(ي) يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل $\frac{1}{x} \times \ln x$ وبوضع $u(x) = \ln x$ نجد $u'(x) = \frac{1}{x}$ وبالتالي $f(x) = u'(x)u(x)$ و عليه فالدالة الأصلية للدالة f هي الدالة F حيث:

$$f(x) = \frac{1}{2} (\ln x)^2$$

تطبيق 17

تعيين دالة أصلية لدالة ناطقة

$$(1) \text{ } f \text{ دالة معرفة على }]-1, +\infty[\text{ بـ } f(x) = \frac{x+4}{(x+1)^2}$$

$$(1) \text{ اكتب } f(x) \text{ على الشكل } \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2}$$

(ب) استنتج دالة أصلية لـ f على I .

$$(2) \text{ } g \text{ دالة معرفة على }]2, +\infty[\text{ بـ } g(x) = \frac{2x^2-3x+1}{x-2}$$

$$(1) \text{ اكتب } g(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$$

(ب) استنتج دالة أصلية للدالة g على I .

$$(3) \text{ } h \text{ دالة معرفة على }]1, +\infty[\text{ بـ } h(x) = \frac{x^3+x^2-x+2}{x^2-1}$$

$$(1) \text{ اكتب } h(x) \text{ على الشكل } \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1}$$

(ب) استنتج دالة أصلية لـ h على H .

الحل

$$(1) \text{ بتوحيد المقامات نجد } f(x) = \frac{ax+b}{(x+1)^2} \text{ و بالتطابقة مع عبارة } f(x) \text{ نجد:}$$

$$f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2} \text{ و عليه } a=1 \text{ و } b=3$$

$$(ب) \text{ الدالة الأصلية للدالة } x \mapsto \frac{1}{x+1} \text{ هي } x \mapsto \ln(x+1)$$

$$\text{والدالة الأصلية للدالة } x \mapsto \frac{3}{(x+1)^2} \text{ هي } x \mapsto \frac{-3}{x+1}$$

$$\text{وبالتالي الدالة الأصلية لـ } f \text{ هي } F(x) = \ln(x+1) + \frac{-3}{x+1}$$

$$(2) \text{ بنفس الكيفية السابقة نجد أن } g(x) = 2x+1 + \frac{3}{x-2}$$

$$(ب) \text{ الدالة الأصلية للدالة } x \mapsto 2x+1 \text{ هي الدالة } x \mapsto x^2+x$$

$$\text{والدالة الأصلية للدالة } x \mapsto \frac{3}{x-2} \text{ هي الدالة } x \mapsto 3 \ln(x-2)$$

$$\text{وبالتالي الدالة الأصلية لـ } g \text{ هي } F(x) = x^2+x+3 \ln(x-2)$$

$$(3) \text{ بنفس الكيفية السابقة نجد } h(x) = x+1 + \frac{3}{2(x-1)} - \frac{3}{2(x+1)}$$

$$\text{الدالة الأصلية للدالة } x \mapsto \frac{3}{2} \times \frac{1}{x-1} \text{ هي الدالة } x \mapsto \frac{3}{2} \ln(x-1)$$

$$\text{و الدالة الأصلية للدالة } x \mapsto \frac{3}{2} \times \frac{1}{x+1} \text{ هي الدالة } x \mapsto \frac{3}{2} \ln(x+1)$$

$$\text{و الدالة الأصلية للدالة } x \mapsto x+1 \text{ هي الدالة } x \mapsto \frac{x^2}{2} + x$$

$$\text{وبالتالي الدالة الأصلية للدالة } h \text{ هي } F \text{ حيث } F(x) = \frac{x^2}{2} + x + \frac{3}{2} \ln(x-1) - \frac{3}{2} \ln(x+1)$$

تطبيق 18

تعيين دالة أصلية لدالة مثلثية

$$f \text{ دالة معرفة على } \mathbb{R} \text{ بـ } f(x) = \cos^3 x$$

$$(1) \text{ باستعمال العلاقة } \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \text{ بين أن } f(x) = \cos x - \cos x \sin^2 x$$

$$(2) \text{ استنتج دالة أصلية لـ } f \text{ على } \mathbb{R}$$

الحل

$$(1) \text{ من العلاقة } \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \text{ نجد } \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$\text{منه } f(x) = \cos x \cos^2 x = \cos x (1 - \sin^2 x) = \cos x - \cos x \sin^2 x$$

$$\text{الدالة } x \mapsto \cos x \sin^2 x \text{ من الشكل } x \mapsto u'(x) u^2(x) \text{ حيث } u(x) = \sin x$$

$$\text{وبالتالي فإن دالتها الأصلية هي } x \mapsto \frac{\sin^3 x}{3}$$

$$\text{إذن الدالة الأصلية للدالة } f \text{ هي الدالة } F \text{ حيث } F(x) = \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x$$

تطبيق 19

تعيين دالة أصلية لدالة مثلثية

$$f \text{ دالة معرفة على } \mathbb{R} \text{ بـ } f(x) = \sin^2 x \cos^3 x$$

$$(1) \text{ بين أن } f(x) = \cos x \sin^2 x - \cos x \sin^4 x$$

$$(2) \text{ استنتج دالة أصلية للدالة } f \text{ على } \mathbb{R}$$

الحل

$$(1) \text{ لدينا } \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \text{ منه } \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$\text{إذن } f(x) = \sin^2 x \cos x \cos^2 x$$

$$= \sin^2 x \cos x (1 - \sin^2 x) = \cos x \sin^2 x - \cos x \sin^4 x$$

(2) الدالة $x \mapsto \cos x \sin^4 x$ من الشكل $x \mapsto u'(x)(u(x))^4$

وبالتالي دالتها الأصلية هي $x \mapsto \frac{1}{5} (u(x))^5$ أي $x \mapsto \frac{1}{5} \sin^5 x$

الدالة $x \mapsto \cos x \sin^2 x$ من الشكل $x \mapsto u'(x)(u(x))^2$

ومنه فإن دالتها الأصلية هي $x \mapsto \frac{1}{3} (u(x))^3$ أي $x \mapsto \frac{1}{3} \sin^3 x$

إذن الدالة الأصلية للدالة f على \mathbb{R} هي $F(x) = \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{1}{5} \sin^5 x$

وبصفة عامة إذا كانت $f(x) = a \cos^n x \sin^p x$ مع p و n طبيعيين غير معدومين فإن:

- إذا كان أحدهما فردي والآخر زوجي نستعمل المساواة $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ التي تسمح لنا بكتابة $f(x)$ على الشكل $f(x) = \sin x \times q(\cos x)$ حيث q دالة كثيرة حدود و

بهذه الكتابة نستطيع تعيين دالة أصلية لـ f .

- إذا كان p و n كليهما زوجي نستعمل الكتابة الخطية مما يسمح لنا بكتابة $f(x)$ على شكل مجاميع من الشكل $\lambda \cos(\alpha x)$ أو $\mu \sin(\beta x)$ والتي دالتها الأصلية معروفة.

تطبيق 20 تعيين دالة أصلية لدالة أسية

$f(x) = x^3 e^{3x}$ دالة معرفة على \mathbb{R}

أوجد دالة أصلية F للدالة f على \mathbb{R} بحيث $F(x) = p(x)e^{3x}$ مع p دالة كثيرة حدود من الدرجة الثالثة.

✓ الحل

$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ من الدرجة الثالثة هنا يعني أن

حيث a, b, c, d أعداد حقيقية و $a \neq 0$

بما أن F دالة أصلية لـ f على \mathbb{R}

فإنه من أجل كل x من \mathbb{R} لدينا $F'(x) = p'(x)e^{3x} + 3p(x)e^{3x} = e^{3x}(p'(x) + 3p(x))$

$= [3ax^3 + (3a+3b)x^2 + (2b+3c)x + c+3d] e^{3x}$

ولدينا من جهة أخرى $F'(x) = f(x)$

بالمطابقة مع عبارة $f(x)$ نجد $a = \frac{1}{3}$ ، $b = -\frac{1}{3}$ ، $c = \frac{2}{9}$ و $d = -\frac{2}{27}$

ومنه $F(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{9}x - \frac{2}{27} \right) e^{3x}$

تطبيق 21

حساب القيمة المتوسطة لدالة

أحسب القيمة المتوسطة M للدالة f حيث $y = f(x) = \cos^2(\alpha x)$

على المجال $\left[0, \frac{\pi}{\alpha}\right]$

✓ الحل

$$M = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\alpha}} \cos^2(\alpha t) dt$$

$$= \frac{\alpha}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\alpha}} \left(\frac{1 + \cos(2\alpha t)}{2} \right) dt = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\alpha}} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\alpha t) \right] dt$$

$$= \frac{\alpha}{\pi} \left[\frac{1}{2} t + \frac{1}{4\alpha} \sin(2\alpha t) \right]_0^{\frac{\pi}{\alpha}} = \frac{\alpha}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2\alpha} = \frac{1}{2}$$

تطبيق 22

تعيين اتجاه تغير دالة أصلية

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$$

(أ) أحسب $F(0)$ ثم $F'(x)$. (ب) ادرس اتجاه تغيرات الدالة F .

✓ الحل

$$F(0) = \int_0^0 \frac{1}{1+t^2} dt = 0$$

الدالة $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ مستمرة على \mathbb{R} وبالتالي تقبل دالة أصلية F قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}

ولدينا $F'(x) = f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

(2) بما أنه من أجل كل x من \mathbb{R} لدينا $\frac{1}{1+x^2} > 0$ فإن $F'(x) > 0$

ومنه فإن F متزايدة تماماً على \mathbb{R}

تطبيق 23

حساب التكاملات باستعمال الدالة الأصلية

احسب التكاملات التالية.

$$I = \int_0^1 (x-2) dx \quad (أ) \quad I = \int_0^1 (t^2 - 3t + 1) dt \quad (ب)$$

$$I = \int_{\ln 2}^{\ln 3} e^{2x} dx \quad (د) \quad I = \int_0^1 (2t+1)(t^2+t)^3 dt \quad (ج)$$

$$I = \int_0^3 \frac{dt}{\sqrt{2+t}} \quad (و) \quad I = \int_0^1 \frac{3x}{(x^2+1)^2} dx \quad (هـ)$$

$$I = \int_{-2}^{-1} \frac{x-5}{x} dx \quad (ي) \quad I = \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{3x+4}} dx \quad (ن)$$

الحل

$$I = \left[\frac{1}{2} x^2 - 2x \right]_0^1 = [2 - 4] - (0) = -2 \quad (أ)$$

$$I = \left[\frac{1}{3} t^3 - \frac{3}{2} t^2 + t \right]_0^1 = -\frac{1}{6} \quad (ب)$$

$$I = \left[\frac{(t^2+t)^4}{4} \right]_0^1 = 4 \quad (ج)$$

$$I = \left[\frac{1}{2} e^{2x} \right]_{\ln 2}^{\ln 3} = \frac{1}{2} e^{\ln 9} - \frac{1}{2} e^{\ln 4} = \frac{9}{2} - 2 = \frac{5}{2} \quad (د)$$

$$I = \int_0^1 \frac{3}{2} \times \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx = \frac{3}{2} \int_0^1 u'(x) u^{-2}(x) dx \quad (هـ)$$

$$= \left[\frac{-3}{2u(x)} \right]_0^1 = \left[\frac{-3}{2(x^2+1)} \right]_0^1 = \frac{3}{4}$$

$$I = \int_0^3 \frac{dt}{\sqrt{2+t}} = \int_0^3 \frac{(2+t)}{\sqrt{2+t}} dt = [2\sqrt{2+t}]_0^3 = 2\sqrt{5} - 2\sqrt{2} \quad (و)$$

$$I = \int_0^4 \frac{1}{3} \frac{3}{\sqrt{3x+4}} dx = \frac{1}{3} \int_0^4 \frac{(3x+4)}{\sqrt{3x+4}} dx = \left[\frac{2}{3} \sqrt{3x+4} \right]_0^4 = \frac{8}{3} - \frac{4}{3} = \frac{4}{3} \quad (ن)$$

$$I = \int_{-2}^{-1} \frac{x-5}{x} dx = \int_{-2}^{-1} \left(1 - \frac{5}{x} \right) dx = [x - 5 \ln(-x)]_{-2}^{-1} = 1 + 5 \ln 2 \quad (ي)$$

تطبيق 24

تعيين دالة أصلية باستعمال علاقة شال ومساحة قرص

$$f(x) = \sqrt{4-(x-1)^2}, \quad x \in [-1, 1] \quad f \text{ معرفة على } [-1, +\infty[$$

$$f(x) = \frac{2}{x}, \quad x \geq 1$$

(1) بين أن منحنى الدالة f على المجال $[-1, 1]$ هو ربع دائرة ثم مثل بيان

$$(2) \text{ استعمال علاقة شال لحساب التكاملين } I = \int_{-1}^1 f(x) dx$$

$$J = \int_1^4 f(x) dx$$

الحل

(1) من أجل كل x من $[-1, 1]$ نضع $y = \sqrt{4-(x-1)^2}$ بتربيع الطرفين نجد

$y^2 = 4 - (x-1)^2$ ومنه نستنتج $(x-1)^2 + y^2 = 4$ إذن النقطة $M(x, y)$ تنتمي إلى الدائرة التي مركزها $\Omega(1, 0)$ وطول نصف قطرها $R=2$.

وبما أن $x \in [-1, 1]$ و $y \geq 0$

فإن (y) هو ربع دائرة



$$I = \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 y dx = \int_{-1}^1 y dx + \int_1^4 f(x) dx \quad (2)$$

$$I = \frac{1}{4} S + 2 [\ln x]_1^3 = \frac{1}{4} \pi \times 4 + 2 \ln 2 = \pi + 2 \ln 2$$

حيث S مساحة الدائرة

$$J = \int_1^4 f(x) dx = \int_1^4 \frac{2}{x} dx = 2 \ln x \Big|_1^4 = 2 \ln 4 - 2 \ln 1 = 2 \ln 4$$

$$= [2 \ln(x)]_1^4 - \int_1^4 f(x) dx = 2 \ln 4 - \pi$$

حساب التكاملات

تطبيق 25

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx \quad (1)$$

$$(2) \text{ احسب } I_2 + I_1 \text{ إذا علمت أن } I_2 = \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2} dx \text{ ثم استنتج قيمة } I_1$$

✓ الحل

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{1+x^2} dx \quad (1)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(1+x^2)'}{(1+x^2)} dx = \frac{1}{2} [\ln(1+x^2)]_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2$$

$$I_1 + I_2 = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx + \int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1} dx \quad (2)$$

$$= \int_0^1 \frac{x^3+x}{x^2+1} dx = \int_0^1 x dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}(1 - \ln 2) \quad \text{أي} \quad I_2 = \frac{1}{2} - I_1 \quad \text{منه نجد} \quad \begin{cases} I_1 + I_2 = \frac{1}{2} \\ I_1 = \frac{1}{2} \ln 2 \end{cases} \quad \text{إذن}$$

تطبيق 26

مهمة حصر تكامل دالة

(1) مثل الدالة f المعرفة على $[0, 1]$ بـ $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ (الوحدة 8cm)
(جزئ المجال $[0, 1]$ إلى 8 مجالات متساوية الطول).
(2) باستعمال طريقة المستطيلات احصر مساحة الحيز من المستوى تحت منحنى الدالة f ثم احسب سعة هذا الحصر والتي تمثل حاد من الأعلى للفرق بين مساحة المستطيلات الكبرى ومساحة المستطيلات الصغرى

$$f = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx \quad \text{استنتج حصرًا لـ}$$

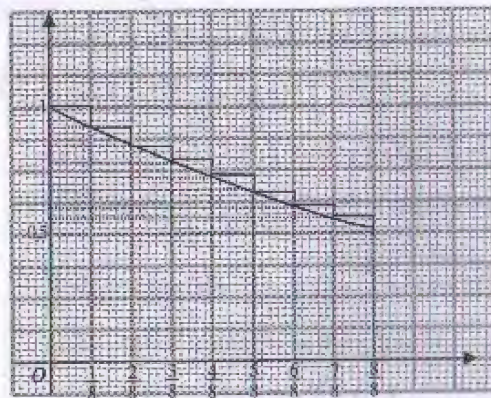
✓ الحل

$$\frac{1}{8} \sum_{k=1}^8 f\left(\frac{k}{8}\right) \geq \mathcal{A} \geq \frac{1}{8} \sum_{k=1}^8 f\left(\frac{k-1}{8}\right) \quad (1)$$

$$\text{ومنه } 314 \times 10^{-15} \geq \mathcal{A} \geq 213,28 \times 10^{-15}$$

$$M = \frac{1}{8} \sum_{k=1}^8 f\left(\frac{k}{8}\right) - \frac{1}{8} \sum_{k=1}^8 f\left(\frac{k-1}{8}\right) \approx 1,0072 \times 10^{-13} \quad \text{سعة الحصر هي}$$

$$\text{إذن } 314 \times 10^{-15} \geq \int_0^1 \frac{1}{t^2+1} dt \geq 213,28 \times 10^{-15}$$



التمثيل
السمائي
للدالة
 f
على المجال
 $[0, 1]$

تطبيق 27

مهمة تعيين دالة أصلية باستعمال التكامل بالتجزئة

باستعمال التكامل بالتجزئة عين الدالة الأصلية للدالة f في كل حالة من الحالات التالية على المجال المعطى والتي تنعدم عند a

$$a=1, I=[0, +\infty[\quad f(x)=(2x+1)\ln x \quad (1)$$

$$a=0, I=\mathbb{R} \quad f(x)=(2x+1)e^x \quad (2)$$

$$a=\frac{\pi}{2}, I=\mathbb{R} \quad f(x)=x \cos x \quad (3)$$

$$a=1, I=[0, +\infty[\quad f(x)=(\ln x)^2 \quad (4)$$

$$a=0, I=\mathbb{R} \quad f(x)=e^{-2x} \cos x \quad (5)$$

✓ الحل

$$(1) \text{ بوضع } u'(x)=2x+1 \text{ و } v(x)=\ln x \text{ يكون } u(x)=x^2+x \text{ و } v'(x)=\frac{1}{x}$$

$$F(x) = \int_1^x u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_1^x - \int_1^x u(t)v'(t)dt$$

$$= [u(t)v(t)]_1^x - \int_1^x \frac{t^2+t}{t} dt = [(t^2+t)\ln t]_1^x - \int_1^x (t+1)dt$$

$$= [(t^2+t)\ln t - \frac{t^2}{2} - t]_1^x = [(x^2+x)\ln x - \frac{x^2}{2} - x] - \left[-\frac{1}{2} - 1\right]$$

$$F(x) = \int_0^x u(t)v'(t)dt = [e^{-2t} \sin t]_0^x - \int_0^x -2(\sin t)e^{-2t}dt$$

$$= e^{-2x} \sin x + 2 \int_0^x (\sin t)(e^{-2t})dt$$

نضع $G(x) = \int_0^x (\sin t)e^{-2t}dt$ ونستعمل التكامل بالتجزئة مرة أخرى لتعيين الحالة

$$\begin{cases} u(t) = -\cos t \\ v'(t) = -2e^{-2t} \end{cases} \text{ فيكون } \begin{cases} u'(t) = \sin t \\ v(t) = e^{-2t} \end{cases} \text{ بوضع}$$

$$G(x) = [(-\cos t)e^{-2t}]_0^x - \int_0^x 2e^{-2t} \cos t dt$$

$$G(x) = -(\cos x)e^{-2x} + 1 - 2F(x)$$

$$F(x) = e^{-2x} \sin x - 2(\cos x)e^{-2x} + 2 - 4F(x) \text{ إذن}$$

$$5F(x) = e^{-2x} \sin x - 2(\cos x)e^{-2x} + 2$$

$$5F(x) = e^{-2x} [\sin x - 2 \cos x] + 2$$

$$F(x) = \frac{1}{5} e^{-2x} [\sin x - 2 \cos x] + \frac{2}{5}$$

تطبيق 28 حساب التكامل باستعمال التجزئة

نعتبر التكامل التالي $I_{(n,k)} = \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} dx$ حيث n و k عددين

طبيعيين غير محدومين و $k \leq n$

(1) أوجد علاقة بين $I_{(n,k)}$ و $I_{(n,k-1)}$ ثم استنتج بدلالة n و k

(2) احسب $I_{(2,1)}$ و $I_{(5,2)}$

✓ الحل

(1) لإيجاد علاقة بين $I_{(n,k)}$ و $I_{(n,k-1)}$ نستعمل التكامل بالتجزئة

$$\text{بوضع } u(x) = x^k \text{ يكون } u'(x) = kx^{k-1}$$

$$v(x) = (1-x)^{n-k} \text{ يكون } v'(x) = -\frac{1}{n-(k-1)}(1-x)^{n-(k-1)}$$

$$\text{و عليه } I_{(n,k)} = -\frac{1}{n-(k-1)} \left([x^k (1-x)^{n-(k-1)}]_0^1 - \int_0^1 kx^{k-1} (1-x)^{n-(k-1)} dx \right)$$

$$= (x^2 + x) \ln(x) - \frac{x^2}{2} - x + \frac{3}{2}$$

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x (2t+1)e^t dt \quad (2)$$

بوضع $u(t) = 2t+1$ و $v'(t) = e^t$ يكون $u'(t) = 2$ و $v(t) = e^t$

$$F(x) = \int_0^x u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_0^x - \int_0^x u'(t)v(t)dt$$

$$= [(2t+1)e^t]_0^x - \int_0^x 2e^t dt = [(2t+1)e^t - 2e^t]_0^x$$

$$= (2x+1)e^x - 2e^x + 1 = e^x(2x-1) + 1$$

$$F(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^x f(t)dt \text{ و } f(x) = x \cos x \quad (3)$$

$$\begin{cases} u(t) = 1 \\ v'(t) = \sin t \end{cases} \text{ فيكون } \begin{cases} u'(t) = 0 \\ v(t) = -\cos t \end{cases} \text{ بوضع}$$

$$F(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^x u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_{\frac{\pi}{2}}^x - \int_{\frac{\pi}{2}}^x u'(t)v(t)dt$$

$$= [t \sin t]_{\frac{\pi}{2}}^x - \int_{\frac{\pi}{2}}^x \sin t dt = x \sin x - \frac{x}{2} + [\cos t]_{\frac{\pi}{2}}^x$$

$$= x \sin x - \frac{x}{2} + \cos x$$

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \frac{2}{x} \ln x \end{cases} \text{ فيكون } \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = (\ln x)^2 \end{cases} \text{ بوضع} \quad (4)$$

$$F(x) = \int_1^x f(t)dt = \int_1^x u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_1^x - \int_1^x [u'(t)v(t)]dt$$

$$= [t(\ln t)^2]_1^x - \int_1^x 2 \ln t dt = [t(\ln t)^2]_1^x - [2(t \ln t - t)]_1^x$$

$$= [t(\ln t)^2 - 2t \ln t + 2t]_1^x = x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x - 2$$

$$F(x) = \int_0^x e^{-2t} \cos t dt \quad (5)$$

$$\begin{cases} u(t) = -2e^{-2t} \\ v'(t) = \sin t \end{cases} \text{ فيكون } \begin{cases} u'(t) = e^{-2t} \\ v(t) = -\cos t \end{cases} \text{ بوضع}$$

$$I_{(n,k)} = \frac{k}{n-(k-1)} \int_0^1 x^{k-1} (1-x)^{n-(k-1)} dx = \frac{k}{n-(k-1)} I(n, k-1)$$

$$\begin{aligned} I_{(n,k)} &= \frac{k}{n-(k-1)} I(n, k-1) = \frac{k}{n-(k-1)} \cdot \frac{k-1}{n-(k-2)} I(n, k-2) \\ &= \frac{k}{n-(k-1)} \cdot \frac{k-1}{n-(k-2)} \cdot \frac{k-2}{n-(k-3)} I(n, k-3) \\ &= \frac{k}{n-(k-1)} \cdot \frac{k-1}{n-(k-2)} \cdot \frac{k-2}{n-(k-3)} \cdots \frac{2}{n-1} \cdot \frac{1}{n} I(n, 0) \\ &= \frac{k!(n-k)!}{n!} I(n, 0) \end{aligned}$$

$$I(n, k) = \frac{k!(n-k)!}{n!} I(n, 0) \quad \text{إذن}$$

$$I_{(n,0)} = \int_0^1 (1-x)^n dx = -\left[\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1} \quad \text{نكن}$$

$$I_{(n,k)} = \frac{k!(n-k)!}{n!} \times \frac{1}{n+1} \quad \text{وبالتالي}$$

$$I_{(5,2)} = \frac{1}{60} \quad \text{و} \quad I_{(2,1)} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \quad (2)$$

حساب مساحة حيز من المستوي

تطبيق 29

$$g(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2} \quad \text{بـ} \quad]1, +\infty[$$

$$g(x) = x + 2 + \frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

ماهي المستقيمات المقاربة لمنحنى الدالة g .

(2) احسب مساحة حيز المستوي المحدود بمنحنى g والمستقيمات التي

معادلاتها $y = x+2$ و $x = 4$ و $x = m$ مع $m > 4$.

عين نهاية هذه المساحة لـ $m \rightarrow +\infty$

✓ الحل

(1) من اجل كل $x \neq 1$ لدينا

$$x + 2 + \frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{(x+2)(x-1)^2 + 3(x-1) + 1}{(x-1)^2} = \frac{x^3}{(x-1)^2}$$

بما ان $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = +\infty$ فإن المستقيم ذا المعادلة $x = 1$ مقارب عمودي لمنحنى الدالة g .

بما ان $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) - (x+2) = 0$ فإن المنحنى له مستقيم مقارب مائل معادلته $y = x+2$ بجوار $(+\infty)$ و $(-\infty)$

(2) من اجل كل $x > 4$ لدينا $g(x) - (x+2) > 0$ و منه المنحنى (y) للدالة g يقع فوق للمستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x+2$

و عليه فالمساحة بين (y) و (Δ) هي $S = \int_4^m [g(x) - (x+2)] dx$

$$\begin{aligned} S &= \int_4^m \left(\frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} \right) dx = \left[3 \ln(x-1) - \frac{1}{x-1} \right]_4^m \\ &= \left(3 \ln(m-1) - \frac{1}{m-1} - 3 \ln 3 + \frac{1}{3} \right) \\ \lim_{m \rightarrow +\infty} S &= +\infty \end{aligned}$$

حساب مساحة حيز من المستوي

تطبيق 30

$$f(x) = \frac{1}{x} (1 + \ln x) \quad \text{بـ} \quad]0, +\infty[$$

(1) ادرس تغيرات الدالة f ثم ارسم منحنىها البياني في معلم متعامد و متجانس

$$\|\vec{i}\| = 3 \text{ cm} \quad \text{حيث} \quad (0, \vec{i}, \vec{j})$$

(2) عين m فاصلة نقطة تقاطع (y) مع محور الفواصل

(3) ليكن S_1 الحيز المحصور بين (y) و محور الفواصل و المستقيمين ذوي

المعادلتين $x = \frac{1}{e}$ و $x = 1$ وليكن S_2 الحيز المحصور بين (y) و محور

الفواصل و المستقيمين ذوي المعادلتين $x = a$ و $x = 1$ مع $a > 1$ عين a بحيث ان الحيزين S_1 و S_2 لهما نفس المساحة.

✓ الحل

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \ln x) &= -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{لان} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \quad (1) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= 0 \times \infty \quad \text{عدم التعيين} \end{aligned}$$

تطبيق 31 حساب المساحة بين منحنيين ومحور الفواصل

تطبيق 31

1. $f(x) = e^{-x}$ و $g(x) = (x+1)e^{-x}$ على \mathbb{R} بـ $f(x) = e^{-x}$ و $g(x) = (x+1)e^{-x}$ في مخطط إحداثيات (C_f) و (C_g) ثم ارسم منحنيهما البيانيين (C_f) و (C_g) في معلم متعامد و متجانس طول الوحدة 1 cm.
2. تعتبر المستقيم (Δ) ذا المعادلة $x = m$ مع $m > 0$ باستعمال التكامل بالتجزئة احسب بدلالة m المساحة $S(m)$ لحيز المستوي الحدود بين (x, x') و المستقيم (Δ) و المنحنيين (C_f) و (C_g) .
3. ماهي نهاية هذه المساحة لـ m يؤول إلى $(+\infty)$.

الحل

1. دراسة تغيرات f :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

الدالة f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ولدينا $f'(x) = -e^{-x}$

من أجل كل x من \mathbb{R} يكون $f'(x) < 0$

وبالتالي فإن الدالة f متناقصة تماما على مجموعة تعريفها

دراسة تغيرات g :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} + x e^{-x}) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x}(1+x) = -\infty$$

الدالة g قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ولدينا $g'(x) = -x e^{-x}$

$x = 0$ يكافئ $g'(x) = 0$

إذا كان $x > 0$ فإن $g'(x) < 0$ وإذا كان $x < 0$ فإن $g'(x) > 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
إشارة g'		+	-
تغيرات g		↗ 1 ↘	0

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		-
$f(x)$		↘ 0

(C_g) يقطع (x, x') في النقطة $A(-1, 0)$

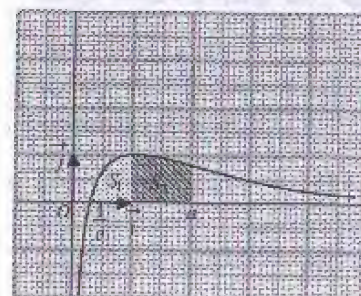
$$S(m) = \int_{-1}^m g(x) dx + \int_0^m f(x) dx \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} \right) = 0$$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ ولدينا $f'(x) = \frac{-\ln x}{x^2}$

$x = 1$ يكافئ $f'(x) = 0$

إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $-\ln x$



x	0*	1	$+\infty$
إشارة $f'(x)$		+	-
تغيرات f		↗ 1 ↘	0

2. فاصلة نقطة التقاطع (y) مع (x, x') هي حل للمعادلة $f(x) = 0$

$$x = e^{-1} = \frac{1}{e} \text{ يكافئ } 1 + \ln x = 0$$

$$\text{إذن } m = \frac{1}{e}$$

$$S_1 = \int_{\frac{1}{e}}^1 f(t) dt = \int_{\frac{1}{e}}^1 \left(\frac{1}{t} + \frac{\ln t}{t} \right) dt = \left[\ln t + \frac{1}{2} (\ln t)^2 \right]_{\frac{1}{e}}^1 \quad (3)$$

$$= -\ln\left(\frac{1}{e}\right) - \frac{1}{2} \left(\ln\left(\frac{1}{e}\right) \right)^2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ (وحدة المساحة)}$$

$$\text{إذن } S_1 = \frac{9}{2} \text{ cm}^2$$

$$S_2 = \left[\ln t + \frac{1}{2} (\ln t)^2 \right]_1^a = \ln a + \frac{1}{2} (\ln a)^2$$

$$S_2 = 9 \left[\ln a + \frac{1}{2} (\ln a)^2 \right] \text{ cm}^2$$

$$2 \ln(a) + (\ln(a))^2 = 1 \text{ يكافئ } 9 \left[\ln a + \frac{1}{2} (\ln a)^2 \right] = \frac{9}{2} \text{ يكافئ } S_2 = S_1$$

بوضع $\ln(a) = \alpha$ نجد $\alpha^2 + 2\alpha - 1 = 0$ (*)

$$\alpha_2 = -1 - \sqrt{2} \text{ و } \alpha_1 = -1 + \sqrt{2} \text{ لها حلان (*) ومنه المعادلة } \Delta = 4 - 4(1)(-1) = 8$$

الحالة الأولى $\alpha = \alpha_1$

$$\ln a = \alpha_1 \text{ يكافئ } a = e^{-1+\sqrt{2}} \text{ مقبول}$$

الحالة الثانية $\alpha = \alpha_2$

$$\ln a = \alpha_2 \text{ يكافئ } a = e^{-1-\sqrt{2}} \text{ (مرفوض إذن قيمة } \alpha \text{ الظلوية هي } e^{-1+\sqrt{2}})$$

✓ الحل

(1) $y = x - 2$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $(+\infty)$ إذا فقط إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1-x} = 0$ وبما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x - 2) = 0$ فإن $y = x - 2$ معادلة مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) لدينا $f(x) - (x - 2) = e^{1-x}$

من أجل كل x من \mathbb{R} لدينا $e^{1-x} > 0$ ومنه فإن للنحنى (C_f) يقع فوق (Δ) بما أن النحنى (C_f) يقع فوق (Δ) فإن المساحة S_1 هي

$$S_1 = \int_0^{\lambda} [f(x) - (x - 2)] dx = \int_0^{\lambda} e^{1-x} dx = [-e^{1-x}]_0^{\lambda} = -e^{1-\lambda} + e$$

$B(\lambda, e^{1-\lambda}), A(\lambda, 0)$ (3)

المماس لـ (C_g) عند B معادلته $y = -e^{1-\lambda}(x - \lambda) + e^{1-\lambda}$ فاصلة نقطة تقاطع المماس مع $(x'x')$ هي حل للمعادلة $-e^{1-\lambda}(x - \lambda) + e^{1-\lambda} = 0$ $-e^{1-\lambda}(x - \lambda) + e^{1-\lambda} = 0$ يكافئ $\lambda e^{1-\lambda} + e^{1-\lambda} = x e^{1-\lambda}$ يكافئ $x = \lambda + 1$ منه $C(\lambda + 1, 0)$

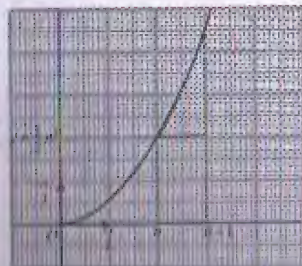
مساحة المثلث ABC هي $S_2 = \frac{e^{1-\lambda}}{2}$

ومنه $S_1 + 2S_2 = -e^{1-\lambda} + e + e^{1-\lambda} = e$ $S_1 + 2S_2$ مستقل عن λ

تطبيق 33

حساب المساحات

(y) جزء من قطع مكافئ ذو المعادلة $y = \frac{1}{2}x^2$ مع $x \geq 0$ U_n مساحة حيز المستوي المحدب بـ (y) و المستقيمين ذوي n عدد طبيعي $x = n+1$ و $y = \frac{1}{2}n^2$ بين ان للتتالية (U_n) حسابية

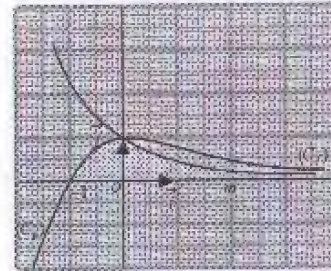


$$U_n = \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}n^2 \right) dx = \left[\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}n^2x \right]_n^{n+1}$$

$$= \frac{1}{6}(n+1)^3 - \frac{1}{2}n^2(n+1) - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{2}n^3 = \frac{1}{2}n + \frac{1}{6}$$

بما أن $U_n = an + b$ فإنها حسابية أساسها

النصف و حدها الأول السدس



$$= \int_{-1}^0 g(x) dx + \int_0^m e^{-x} dx$$

$$\int_0^m e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^m = -e^{-m} + 1$$

نحسب $\int_{-1}^0 g(x) dx$ باستعمال التكامل بالتجزئة.

بوضع $\begin{cases} u(x) = x+1 \\ v'(x) = -e^{-x} \end{cases}$ يكون $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases}$

$$\int_{-1}^0 g(x) dx = \int_{-1}^0 u(x)v'(x) dx = [-e^{-x}(x+1)]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 -e^{-x} dx$$

$$= [e^{-x}(-x-2)]_{-1}^0 = (-2) - (e)(-1) = -2 + e$$

$$S(m) = -2 + e - e^{-m} + 1 = -e^{-m} + e - 1$$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} S(m) = \lim_{m \rightarrow +\infty} (-e^{-m} + e - 1) = e - 1$$

تطبيق 32

حساب المساحات

كردالة معرفة على \mathbb{R} بـ $f(x) = (x-2) + e^{1-x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس.

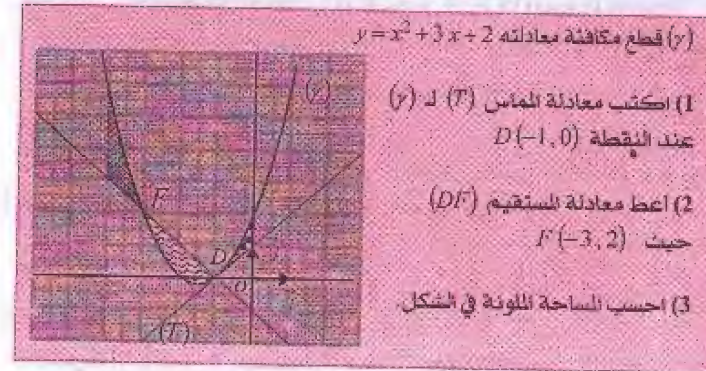
(1) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x - 2$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $(+\infty)$ ثم حدد الوضع النسبي لـ (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

(2) λ عدد حقيقي موجب، نعتبر حيز المستوي المحدب بـ (C_f) و المستقيمين ذوي المعادلتين $x = \lambda$ و $x = 0$ S_1 مساحة هذا الحيز بدلالة λ

(3) نعتبر الدالة g المعرفة على \mathbb{R} بـ $g(x) = e^{1-x}$ A نقطة إحداثياتها $(\lambda, 0)$ و B نقطة من (C_g) فاصلتها λ المماس لـ (C_g) عند B يقطع محور الفواصل في نقطة C . احسب إحداثيات C ثم S_2 مساحة المثلث ABC بين أن $S_1 + 2S_2$ مستقل عن λ .

تطبيق 34

حساب المساحات



(y) قطع مكافئ معادلته $y = x^2 + 3x + 2$

(1) اكتب معادلة المماس (T) لـ (y) عند النقطة $D(-1, 0)$

(2) اعط معادلة المستقيم (DF) حيث $F(-3, 2)$

(3) احسب المساحة الملونة في الشكل

الحل

(1) دالة القطع المكافئ قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ولدينا $y' = f'(x) = 2x + 3$ ومنه $f'(-1) = 1$ إذن $T: y = x + 1$

(2) $(DF): y = ax + b$
(1) ... $-a + b = 0$ تكافئ $D \in (DF)$
(2) ... $-3a + b = 2$ تكافئ $F \in (DF)$
من (1) و (2) نجد $a = -1$ و $b = -1$ منه $(DF): y = -x - 1$

(3) على المجال $[-4, -3]$ النحني يقع فوق (DF)
و على المجال $[-3, -1]$ النحني يقع تحت (DF)
و على المجال $[-1, 0]$ النحني يقع فوق (T) وعليه

$$\begin{aligned} S &= \int_{-4}^{-3} (-y_{\text{upper}} + f(x)) dx + \int_{-3}^{-1} (y_{\text{DF}} - f(x)) dx + \int_{-1}^0 (f(x) - y_{\text{DF}}) dx \\ &= \int_{-4}^{-3} (x^2 + 4x + 3) dx + \int_{-3}^{-1} (-x^2 - 4x - 3) dx + \int_{-1}^0 (x^2 + 2x + 1) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x \right]_{-4}^{-3} + \left[-\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 3x \right]_{-3}^{-1} + \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x \right]_{-1}^0 \\ &= \frac{64}{3} - 20 + \frac{1}{3} + 3 + \frac{1}{3} = \frac{64 - 60 + 1 + 9 + 1}{3} = \frac{15}{3} = 5 \end{aligned}$$

إذن $S = 5$ وحدة مربعة.

تطبيق 35

حساب مساحة القطع الناقص والدائرة

(1) بين أن مساحة ربع قرص مركزه النقطة O ونصف قطرها a مع $a > 0$ موجود في الربع الأول من المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس هي

$$A_D = \frac{\pi}{4} a^2 = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

(2) ليكن (E) قطع ناقص معادلته $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ مع $a > 0$ و $b > 0$

احسب المساحة $A(E)$ للقطع الناقص

الحل

(1) الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها a معادلته $x^2 + y^2 = a^2$

ومن $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ إذن مساحة ربع القرص تساوي ربع مساحة القرص أي $\frac{1}{4} \pi a^2$

و من جهة ثانية هذه المساحة تمثل مجموعة النقط M المعرفة بـ

$$A_D = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx \quad \text{أي} \quad \sqrt{a^2 - x^2} \geq y \geq 0 \quad \text{و} \quad a \geq x \geq 0$$

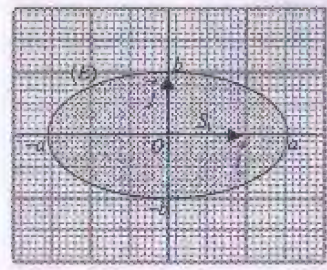
(2) مساحة القطع الناقص تساوي $4S_1$

و هذا سبب التناظرات الموجودة في هذا الشكل

S_1 هي مجموعة النقط $M(x, y)$ بحيث

$$b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \geq y \geq 0 \quad \text{و} \quad a \geq x \geq 0$$

$$\begin{aligned} A(E) &= 4 \int_0^a b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx = \int_0^a 4 \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx \\ &= 4 \frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{4b}{a} \times \frac{\pi a^2}{4} = \pi ab \end{aligned}$$



حساب حجم المخروط الدوراني

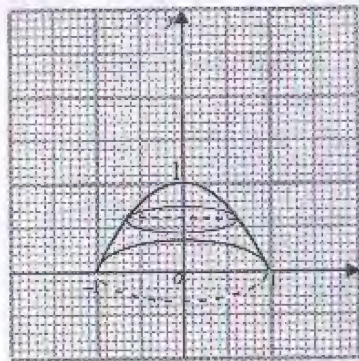
تطبيق 36

في معلم للفضاء نعلم المخروط الدوراني الذي رأسه النقطة $S(0, 0, 4)$ و

قاعدته دائرة مركزها النقطة O ونصف قطرها 2 من المستوى (xOy)

نقطع هذا المخروط بمستوي معادلته $Z = a$ حيث $4 \geq a \geq 0$

(1) عين نصف قطر الدائرة الناتجة من تقاطع المخروط و المستوي ذي المعادلة



الحل

طبيعة مقطع من (Σ) هي دائرة

معادلة المستوي القاطع لـ (Σ)

هي $y = a$ مع $1 \geq a \geq 0$

مساحة المقطع الناتج من تقاطع (Σ)

مع المستوي $y = a$

هي πr^2 مع $r^2 = 1 - a^2$ أي $\pi(1 - a^2)$

$$V = \int_0^1 \pi(1 - a^2) da = \left[\pi \left(a - \frac{a^3}{3} \right) \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

$$V = \pi \int_0^1 x^2 dy = \pi \int_0^1 (1 - y) dy = \frac{\pi}{2} \quad (2) \quad \text{طريقة (2)}$$

تطبيق 38 حساب حجم مجسم دوراني

f دالة معرفة على $]0, +\infty[$ بـ $f(x) = x + \frac{\ln x}{x}$ و (γ) تمثيلها

البياني في معلم متعامد ومتجانس (o, \vec{i}, \vec{j}) حيث $\|\vec{i}\| = 2\text{cm}$

(1) احسب باستعمال التكامل بالتجزئة I حيث $I = \int_1^e \ln x dx$

(2) H دالة معرفة على $]0, +\infty[$ بـ $H(x) = \frac{1}{x} (\ln x)^2 - \frac{2}{x} \ln x - \frac{2}{x}$

بين ان H دالة أصلية لـ h حيث $h(x) = \frac{(\ln x)^2}{x^2}$

(3) نعتبر في المعلم المتعامد والمتجانس للفضاء $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ المجسم S الذي

نحصل عليه بتدوير حول (o, \vec{i}) حيز المستوي المحد باللعن (γ) و المستقيمين

نوي العادلتين $x = e$ و $x = 1$ و $x = x$ احسب حجم (S) و ليكن V

الحل

$$I = \left[x \ln x - x \right]_1^e = (e - e) - (-1) = 1 \quad (1)$$

$Z = a$ بدلالة a ثم عين مساحة قرص التقاطع.

(2) استنتج حجم هذا الخروط بواسطة التكامل ثم احسبه بدلالة الدستور

حيث R نصف قطر دائرة القاعدة و h الارتفاع $\frac{1}{3} \pi R^2 h$

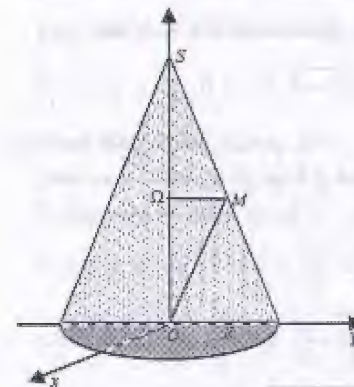
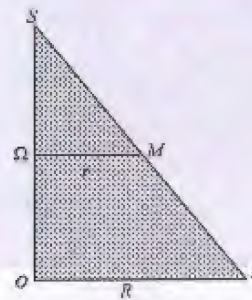
الحل

(1) نصف قطر الدائرة هو ΩM

حسب نظرية طاليس لدينا $\frac{O\Omega}{OS} = \frac{\Omega M}{OB}$ ومنه ،

$$r = \Omega M = \frac{OB \times O\Omega}{OS} = \frac{R \times a}{4} = \frac{aR}{4}$$

مساحة القرص هي πr^2 أي $\pi \frac{a^2 R^2}{16}$



(2)

$$V = \int_0^4 \frac{\pi a^2 R^2}{16} da$$

$$= \frac{\pi R^2}{16} \int_0^4 a^2 da = \frac{\pi R^2}{16} \left[\frac{a^3}{3} \right]_0^4$$

$$= \frac{\pi R^2 \times 64}{16 \times 3} = \frac{4}{3} \pi R^2$$

لدينا $h = 4$ و $V = \frac{\pi R^2}{3} h$

ومنه $V = \frac{4\pi R^2}{3}$

تطبيق 39 حساب حجم مجسم دوراني

تطبيق 39

في معلم متعامد ومتجانس (p) قطع مكافئ معادلته $z = 1 - x^2$ ممثل في

المجال $[-1, 1]$

بتدوير (p) حول محور الترتيب يولد مجسما دورانيا

ماهي طبيعة مقطع من (Σ) بمستوي عمودي على (p) ثم عبر بدلالة a

حيث $1 \geq a \geq 0$ عن مساحته $S(a)$ ثم احسب حجم (Σ)

$$H'(x) = \frac{1}{x^2} (\ln x)^2 - \frac{2}{2x} \ln x + \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^2} \ln x - \frac{2}{2x} = \frac{1}{x^2} (\ln x)^2 = h(x) \quad (2)$$

ومن هنا الدالة H أصلية للدالة h

$$V = \pi \int_1^e (f(x))^2 dx = \pi \int_1^e \left[x^2 + \left(\frac{\ln x}{x} \right)^2 + 2 \ln x \right] dx \quad (3)$$

$$= \pi \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_1^e + \pi \left[H(x) \right]_1^e + 2\pi = \pi \left[\left(\frac{1}{3} e^3 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{-1}{e} - \frac{2}{e} - \frac{-2}{e} \right) + 2 \right]$$

$$= \pi \left[\frac{1}{3} e^3 - \frac{3}{e} + \frac{2}{3} \right] \quad (\text{وحدة الحجم})$$

$$V = \pi \left(\frac{1}{3} e^3 - \frac{3}{e} + \frac{2}{3} \right) (2 \text{ cm})^3 = 8\pi \left(\frac{1}{3} e^3 - \frac{3}{e} + \frac{2}{3} \right) \text{ cm}^3$$

تطبيق 39 إيجاد حساب حجم جسم دوراني

تطبيق 39

(r) قوس المنحنى ممثل على $[\alpha, \beta]$ لدالة من الشكل $f(x) = \sqrt{p(x)}$ حيث $p(x)$ كثير حدود من الدرجة الثانية موجب تماما على $[\alpha, \beta]$. إن تدوير (r) حول (Ox) يولد مجسما دورانيا نريد تعيين حجمه. لنكن B_1 و B_2 مساحتي قاعدتي هذا الجسم و B_3 مساحة مقطع مجسم بالنسوي العمودي على (Ox') و يبعد بنفس المسافة عن مستوي القاعدتين و ليكن $h = \beta - \alpha$

$$(1) \text{ بين ان } V = \frac{h}{6} (B_1 + B_2 + 4B_3)$$

(2) ارتفاع خزان ماء هو 48 m نصف قطري قاعدتيه هما R_1 و R_2 نعتبر ان حجمه هو حجم مجسم دوراني المولد بتدوير حول (Ox') الحيز المحدد بالمنحنى (r) الذي معادلته $y = 12 \sqrt{1 + \frac{x^2}{24^2}}$ و المستقيمان التي معادلتهما $x = -36$ و $x = 12$ و (Ox') احسب حجم هذا المجسم.

الحل:

$$V = \pi \int_a^b (r(x))^2 dx \quad (1)$$

$$V = \pi \int_a^b p(x) dx = \pi \int_a^b (ax^2 + bx + c) dx = \pi \left[\frac{1}{3} ax^3 + \frac{1}{2} bx^2 + cx \right]_a^b$$

$$= \left[\frac{1}{3} a \beta^3 + \frac{1}{2} b \beta^2 + c \beta - \frac{1}{3} a \alpha^3 - \frac{1}{2} b \alpha^2 - c \alpha \right] \pi$$

$$= \left[\frac{1}{3} a (\beta^3 - \alpha^3) + \frac{1}{2} b (\beta^2 - \alpha^2) + c (\beta - \alpha) \right] \pi$$

$$= (\beta - \alpha) \left[\frac{a}{3} (\beta^2 + \alpha \beta + \alpha^2) + \frac{b}{2} (\alpha + \beta) + c \right] \pi$$

$$= \pi \left(\frac{\beta - \alpha}{6} \right) [2a(\beta^2 + \alpha \beta + \alpha^2) + 3b(\alpha + \beta) + 6c]$$

$$= \frac{h}{6} [2a(\beta^2 + \alpha \beta + \alpha^2) + 3b(\alpha + \beta) + 6c] \pi$$

ولدينا $B_1 = \pi (a\alpha^2 + b\alpha + c)$ و $B_2 = \pi (a\beta^2 + b\beta + c)$

$$B_3 = \left[a \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)^2 + b \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) + c \right] \pi$$

$$B_1 + B_2 + 4B_3 = 2a(\beta^2 + \alpha \beta + \alpha^2) + 3b(\alpha + \beta) + 6c$$

$$V = \frac{h}{6} (B_1 + B_2 + 4B_3) \quad \text{لأن}$$

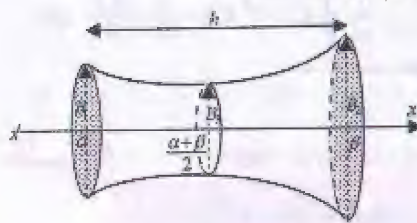
$$\alpha = -36 \quad \text{و} \quad \beta = 12 \quad (2)$$

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = -12 \quad \text{و}$$

$$B_1 = \pi \times 468 \quad \text{و} \quad B_2 = \pi (180)$$

$$\text{و} \quad B_3 = 180\pi \quad \text{و} \quad h = 48$$

$$\text{لأن} \quad V = \frac{48}{6} (4 \times 180\pi + 180\pi + 468\pi) = 8\pi (4 \times 180 + 180 + 468) = 10944\pi$$



تطبيق 40 إيجاد حساب التكامل بتبديل المتغير

تطبيق 40

$$\text{نريد حساب التكامل} \quad \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2} dx$$

$$(1) \text{ اثبت انه من اجل كل } x \text{ من } \mathbb{R} \text{ يكون } \sin^2(x) = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$(2) \text{ باستعمال تبديل المتغير احسب } \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2} dx$$

الحل:

(1) من أجل كل x من \mathbb{R} لدينا

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - \sin^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \quad \text{إذن}$$

(2) بوضع $x = \cos t$ يكون $dx = -\sin t dt$

$$\text{لما } x=0 \text{ فإن } t=\frac{\pi}{2} \quad \text{ولما } x=\frac{1}{2} \text{ فإن } t=\frac{\pi}{3}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2} dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} -\sqrt{1-\cos^2(t)} \sin t dt = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \sin t \sqrt{\sin^2(t)} dt$$

$$= -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \sin t |\sin t| dt = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2(t) dt = -\left[\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin(2t) \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8} \quad \text{إذن}$$

تطبيق 41

دراسة تقارب المتتاليات المعرفة بواسطة التكامل

$$(1) \text{ من أجل كل عدد طبيعي } n \geq 1 \text{ نضع } I_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-x)^n e^{-x} dx$$

(أ) احسب باستعمال التكامل بالتجزئة العدد I_1

$$(ب) \text{ بين أنه من أجل كل } n \geq 1 \text{ يكون } 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n!} \int_0^1 e^{-x} dx$$

استنتج $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$

(ج) برهن باستعمال التكامل بالتجزئة أنه من أجل كل عدد طبيعي

$$I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} - I_n \quad \text{لما } n \geq 1$$

(2) نعتبر المتتالية الحقيقية (a_n) المعرفة بـ $a_1 = 0$ ومن أجل كل عدد

$$\text{طبيعي } n \geq 1, \quad a_{n+1} = a_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معلوم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ ثم استنتج } a_n = \frac{1}{e} + (-1)^n I_n$$

الحل:

$$I_1 = \int_0^1 (1-x) e^{-x} dx \quad (1)$$

$$\text{نضع } \begin{cases} u(x) = 1-x \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases} \text{ منه نجد } \begin{cases} u'(x) = -1 \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases}$$

$$I_1 = \int_0^1 u(x) v'(x) dx = [u(x) v(x)]_0^1 - \int_0^1 u'(x) v(x) dx$$

$$= [(1-x)e^{-x}]_0^1 - \int_0^1 e^{-x} dx$$

$$= [(x-1)e^{-x} + e^{-x}]_0^1 = [xe^{-x}]_0^1 = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

(ب) من أجل كل عدد حقيقي x من $[0, 1]$ لدينا $0 \leq 1-x \leq 1$ منه $0 \leq (1-x)^n \leq 1$ و بضرب طرفي المتباينة في e^{-x} نجد $0 \leq (1-x)^n e^{-x} \leq e^{-x}$ بالمرور إلى التكامل نجد

$$0 \leq \int_0^1 (1-x)^n e^{-x} dx \leq \int_0^1 e^{-x} dx$$

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n!} \int_0^1 e^{-x} dx \quad \text{أي} \quad 0 \leq \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-x)^n e^{-x} dx \leq \frac{1}{n!} \int_0^1 e^{-x} dx$$

$$\int_0^1 e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^1 = -e^{-1} + e^0 = 1 - \frac{1}{e}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0 \quad \text{وحسب نظرية الحصر فإن} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} \int_0^1 e^{-x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{e} \right) = 0$$

$$I_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-x)^n e^{-x} dx \quad (ج)$$

$$\text{بوضع } \begin{cases} u(x) = \frac{-1}{n+1} (1-x)^{n+1} \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases} \text{ نجد } \begin{cases} u'(x) = (1-x)^n \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases}$$

$$I_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 u'(x) v(x) dx = \frac{1}{n!} \left([u(x) v(x)]_0^1 - \int_0^1 u(x) v'(x) dx \right)$$

$$= \frac{1}{n!} \left(\left[-\frac{1}{n+1} (1-x)^{n+1} e^{-x} \right]_0^1 - \frac{1}{n!} \int_0^1 u(x) v'(x) dx \right)$$

$$= \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{n+1} \right) e^0 - \frac{1}{n!} \int_0^1 \frac{1}{n+1} (1-x)^{n+1} e^{-x} dx$$

ب) برهن أن $\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx = \frac{1}{k} - f(k)$ ثم استنتج
 $0 \leq f(k) \leq \frac{1}{k(k+1)}$

(4) تحقق أن من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{0, 1\}$ يكون
 $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \dots (1)$
 ب) نضع من أجل كل $n \geq 1$

$$S_n = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{1}{2n(2n+1)}$$

باستعمال المساواة (1) اعط عبارة مختصرة لـ S_n ثم بين أن المتتالية (S_n) متقاربة نحو عدد يطلب تعيينه.

ج) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ يكون
 $0 \leq f(n) + f(n+1) + \dots + f(2n) \leq S_n$ ثم استنتج
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} [f(n) + f(n+1) + \dots + f(2n)]$

(5) نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معلوم n

$$U_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}$$

أ) تحقق باستعمال السؤال 3 فرع ب أن

$$f(n) + f(n+1) + \dots + f(2n) = U_n - Ln(2) - Ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right)$$

ب) استنتج أن المتتالية (U_n) متقاربة ثم احسب نهايتها.

الحل:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} + Ln(x) - Ln(x+1) \quad (1)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} (1 + x Ln(x)) - Ln(x+1) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

الدالة f قابلة للاشتقاق على I ولدينا

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x(x+1)} = \frac{-x-1+x}{x^2(x+1)} = \frac{-1}{x^2(x+1)}$$

من أجل كل x من I لدينا $f'(x) < 0$

ومنه f متناقضة تماماً على I .

$$= \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+1)!} \int_0^1 (1-x)^{n+1} e^{-x} dx$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} - I_{n+1}$$

$$I_{n+1} = -f_n + \frac{1}{(n+1)!}$$

$$a_{n+1} = a_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{و} \quad a_1 = 0 \quad (2)$$

$$a_n = \frac{1}{e} + (-1)^n I_n \quad \text{إثبات أن}$$

نسمي p_n الخاصية " $a_n = \frac{1}{e} + (-1)^n I_n$ "

من أجل $n=1$ لدينا $I_1 = \frac{1}{e} - \frac{1}{e} = 0$ منه $a_1 = \frac{1}{e} + (-1)^1 I_1 = \frac{1}{e} - \frac{1}{e} = 0$ صحيحة.

نفرض أن p_n صحيحة من أجل عدد طبيعي كافي $n \geq 1$ أي $a_n = \frac{1}{e} + (-1)^n I_n$ و

نبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي $a_{n+1} = \frac{1}{e} + (-1)^{n+1} I_{n+1}$.

$$a_{n+1} = a_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{e} + (-1)^n I_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$= \frac{1}{e} + (-1)^{n+1} \left[-I_n + \frac{1}{(n+1)!} \right] = \frac{1}{e} + (-1)^{n+1} I_{n+1}$$

منه p_{n+1} صحيحة و بالتالي p_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي غير معلوم.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{1}{e} \quad \text{فإن} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0 \quad \text{بما أن}$$

تطبيق 12

دراسة تقارب متتالية

$f(x) = \frac{1}{x} + Ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$ ب) $0, +\infty[$ المجال $I =]0, +\infty[$ ادرس تغيرات f على I

(2) عدد حقيقي موجب تماماً، باستعمال التكامل بالتجزئة احسب

$$\int_1^a f(t) dt \quad \text{ثم} \quad \int_1^a Ln\left(\frac{x}{x+1}\right) dx$$

(3) k عدد طبيعي غير معلوم.

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k} \quad \text{بين أن}$$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		-
$f(x)$	$+\infty$	0

$$I_a = \int_1^a \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) dx \quad (2)$$

$$\begin{cases} u(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) \\ v'(x) = 1 \end{cases} \text{ نضع}$$

$$\begin{cases} u'(x) = -\frac{1}{x(x+1)} \\ v(x) = x \end{cases} \text{ نجد}$$

$$I_a = \int_1^a u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_1^a - \int_1^a \frac{1}{x+1} dx$$

$$= \left[x \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - \ln(x+1) \right]_1^a$$

$$= a \ln\left(\frac{a}{a+1}\right) - \ln(a+1) + 2 \ln(2)$$

$$\int_1^a f(t) dt = \int_1^a \frac{1}{t} dt + \int_1^a \ln\left(\frac{t}{1+t}\right) dt = \int_1^a \frac{1}{t} dt + I_a$$

$$= \ln(a) + I_a = (a+1) \ln\left(\frac{a}{a+1}\right) + 2 \ln(2)$$

(3) من أجل كل x من $[k, k+1]$ يكون $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{x} \geq \frac{1}{k+1}$ بالمرور إلى التكامل نجد

$$\frac{1}{k} \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \geq \frac{1}{k+1} \quad \text{أي} \quad \frac{1}{k}(k+1-k) \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \geq \frac{1}{k+1}(k+1-k)$$

$$\frac{1}{k} - f(k) = \frac{1}{k} - \frac{1}{k} - \ln\left(\frac{k}{k+1}\right) = -\ln\left(\frac{k}{k+1}\right) \quad \text{ب) لدينا}$$

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx = [\ln(x)]_k^{k+1} = \ln(k+1) - \ln(k) = -\ln\left(\frac{k}{k+1}\right)$$

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx = \frac{1}{k} - f(k) \quad \text{منه نستنتج}$$

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k} \quad \text{لدينا}$$

و عليه نجد $-\frac{1}{k} \leq \frac{1}{k+1} - f(k) \leq \frac{1}{k}$ بإضافة $-\frac{1}{k}$ إلى أطراف المتباينة الأخيرة نجد

$$-\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} \leq -f(k) \leq 0 \quad \text{بالمضرب في } (-1)$$

$$0 \leq f(k) \leq \frac{1}{k(k+1)} \quad \text{أي} \quad 0 \leq f(k) \leq \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \quad \text{نجد}$$

(4) (ا) من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{0, 1\}$ لدينا $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1-x}{x(x+1)} = \frac{1}{x(x+1)}$

$$S_n = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{1}{2n(2n+1)} \quad \text{ب)}$$

$$S_n = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{2n+1} = \frac{2n+1-n}{n(2n+1)} = \frac{n+1}{n(2n+1)}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n(2n+1)} = 0$$

منه (S_n) متتالية متقاربة نحو العدد 0.

$$\frac{1}{n(n+1)} \geq f(n) \geq 0 \quad \text{ج) لدينا}$$

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} \geq f(n+1) \geq 0$$

$$\frac{1}{2n(2n+1)} \geq f(2n) \geq 0$$

بجمع أطراف المتباينات طرفاً لطرف نجد $S_n \geq f(n) + f(n+1) + \dots + f(2n) \geq 0$

بما أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 0$ وحسب نظرية الحصر فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) + f(n+1) + \dots + f(2n) = 0$

$$u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \quad (5)$$

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx = \frac{1}{n} - f(n) \quad \text{ا)}$$

$$\int_{n+1}^{n+2} \frac{1}{x} dx = \frac{1}{n+1} - f(n+1)$$

$$\int_{2n}^{2n+1} \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2n} - f(2n)$$

بجمع أطراف المتباينات طرفاً لطرف نجد

$$\int_n^{2n+1} \frac{1}{x} dx = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}\right) - (f(n) + f(n+1) + \dots + f(2n))$$

$$\int_n^{2n+1} \frac{1}{x} dx = U_n - (f(n) + f(n+1) + \dots + f(2n))$$

$$f(n) + f(n+1) + \dots + f(2n) = U_n - \int_n^{2n+1} \frac{1}{x} dx \quad \text{منه نجد}$$

$$\int_n^{2n+1} \frac{1}{x} dx = [\ln x]_n^{2n+1} = \ln(2n+1) - \ln(n) = \ln\left(\frac{2n+1}{n}\right) \quad \text{لكن}$$

$$= \ln(2) + \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right)$$

$$f(n) + f(n+1) + \dots + f(2n) = U_n - L_n(2) - L_n\left(1 + \frac{1}{2n}\right)$$

ب) لدينا من السؤال (5) (1)

$$U_n = f(n) + f(n+1) + \dots + f(2n) + \left[L_n(2) + L_n\left(1 + \frac{1}{2n}\right) \right]$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) + f(n+1) + \dots + f(2n) = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} L_n\left(1 + \frac{1}{2n}\right) = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = L_n(2)$$

إذن $U_n = L_n(2)$ وهذا يعني أن المتتالية (U_n) متقاربة نحو $L_n(2)$.

تطبيق 13

مهمة دراسة تقارب متتالية معرفة بواسطة التكامل

$$I_n = \frac{1}{2^{n+1}} \int_{\pi}^{4n\pi} x \cos \frac{x}{2} dx$$

(1) احسب I_0 باستعمال التكامل بالتجزئة.

(2) برهن أن المتتالية (I_n) هندسية يطلب تعيين أساسها.

(3) نضع $S_n = \sum_{k=0}^n I_k$ ، احسب S_n ، ثم عين نهاية للمتتالية (S_n) .

الحل

$$I_0 = \frac{1}{2} \int_{\pi}^{4\pi} x \cos \frac{x}{2} dx$$

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \cos \frac{x}{2} \end{cases} \quad \text{نضع}$$

$$\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = 2 \sin \frac{x}{2} \end{cases} \quad \text{نجد}$$

$$I_0 = \frac{1}{2} \int_{\pi}^{4\pi} x \cos \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2} \left(\left[u(x)v(x) \right]_{\pi}^{4\pi} - \int_{\pi}^{4\pi} u'(x)v(x) dx \right)$$

$$= \left[x \sin \frac{x}{2} \right]_{\pi}^{4\pi} - \frac{1}{2} \int_{\pi}^{4\pi} 2 \sin \frac{x}{2} dx$$

$$= \left[x \sin \frac{x}{2} \right]_{\pi}^{4\pi} + \left[2 \cos \frac{x}{2} \right]_{\pi}^{4\pi} = 4 - \pi$$

$$I_n = \frac{1}{2^n} I_0 \quad \text{منه} \quad I_n = \frac{1}{2^n} \times \frac{1}{2} \int_{\pi}^{4n\pi} x \cos \frac{x}{2} dx \quad (2)$$

$$I_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}} I_0 = \frac{1}{2^n} \times I_0 \times \frac{1}{2} = I_n \times \frac{1}{2}$$

منه (I_n) متتالية هندسية أساسها $r = \frac{1}{2}$

(3)

$$S_n = \sum_{k=0}^n I_k = I_0 + I_1 + \dots + I_n = I_0 \times \frac{1-r^{n+1}}{1-r} = (4-\pi) \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}}$$

$$= 2(4-\pi) \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right]$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 2(4-\pi)$$

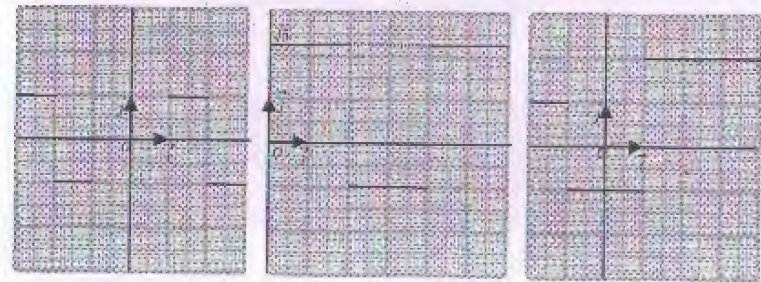
تمارين و مسائل



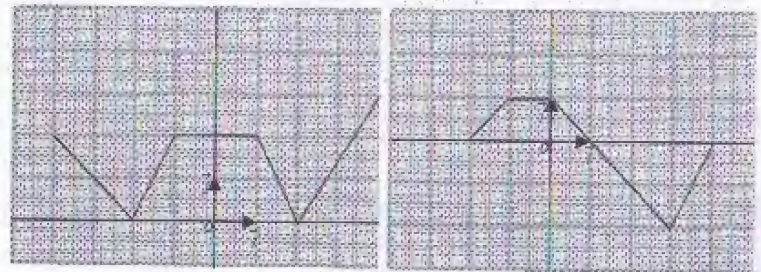
1- مثل الدوال البرجية f العطاء ثم احسب التكامل $I(f)$ في كل حالة من الحالات التالية:

$$(1) \begin{cases} f(x) = 5 & , 1 \geq x \geq -3 \\ f(x) = -4 & , 3 > x \geq 1 \end{cases} \quad (ب) \begin{cases} f(x) = -\sqrt{2} & , \sqrt{5} \geq x \geq -\sqrt{5} \\ f(x) = -2 & , 2\sqrt{5} > x \geq \sqrt{5} \end{cases}$$

2- لكل شكل من الأشكال التالية يمثل التمثيل البياني للدالة درجية f ، عين عبارة $f(x)$ على كل مجال ثم احسب التكامل $I(f)$ على مجال تعريف الدالة f .



3- في كل شكل من الأشكال التالية، الدالة التوافقية بالقطع f ممثلة بالمنحنى العلى احسب باستعمال المساحات التكامل $I(f)$ على مجال تعريف f .



4- f و g دالتان معرفتان على \mathbb{R} بـ $f(x) = \frac{1}{2}x + 5$ و $g(x) = 5 - x$

(أ) ارسم (C_f) و (C_g) على المجال $[-5, 7]$ في معلم متعامد ومتجانس.

(ب) باستعمال حساب المساحات، احسب التكاملات التالية:

$$\int_0^7 f(x) dx, \int_{-4}^0 f(x) dx, \int_0^7 g(x) dx, \int_0^4 g(x) dx$$

5- (1) نعتبر الدالة f المعرفة بـ $f(x) = \sqrt{4-x^2} + 1$ على المجال $[-2, 2]$ بين أن التمثيل البياني للدالة f على المجال $[-2, 2]$ في معلم متعامد ومتجانس هو نصف دائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

(2) باستعمال المستور الذي يعطي مساحة قرص، احسب التكاملات التالية:

$$\int_{-2}^0 f(t) dt, \int_0^2 f(t) dt, \int_{-2}^2 f(t) dt$$

6- لتكن f و g دالتين معرفتين على المجال $[0, 5]$ بـ:

$$\begin{cases} g(x) = -x + 3, & 1 \geq x \geq 0 \\ g(x) = \frac{-1}{2}x + \frac{5}{2}, & 5 \geq x \geq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} f(x) = x + 2, & 1 \geq x \geq 0 \\ f(x) = -x + 2, & 2 \geq x \geq 1 \\ f(x) = x - 4, & 5 \geq x \geq 2 \end{cases}$$

(1) احسب تكامل كل من f و g على المجال $[0, 5]$

(2) استنتج التكاملين على $[0, 5]$ للدالتين $f + 2g$ و $-2f + g$

7- في معلم متعامد و متجانس ارسم على المجال $[0, 1]$ التمثيل البياني لكل من الدالتين

$$x \rightarrow \sqrt{x}, \quad x \rightarrow x^2$$

- إذا علمت أن $\int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3}$ احسب $\int_0^1 x^2 dx$ باستعمال التناظر المحوري.

8- إذا علمت أن $\int_0^{\pi} \sin x dx = 2$ احسب باستعمال التناظرات العروفة للمنحنى ذي المعادلة $y = \sin x$ التكاملات التالية:

$$H = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sin x dx, \quad K = \int_0^{2\pi} \sin x dx, \quad J = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x dx, \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$$

9- من أجل كل قضية من القضايا التالية، بين إن كانت صحيحة أو خاطئة، وفي حالة

هذه الأخيرة بين بمثال يبين ذلك.

لتعتبر الدالة f للعرة المستمرة على \mathbb{R}

$$\int_1^3 f(x) dx + \int_3^5 f(x) dx = \int_1^5 f(x) dx \quad (1)$$

(2) إذا كان $f \geq 0$ على \mathbb{R} من أجل كل عدد حقيقي t يكون $\int_0^t f(x) dx \geq 0$

(3) إذا كان $\int_0^2 f(x) dx$ موجب فإن f موجبة على $[0, 2]$

10 - نعتبر الدالتين f و g مستمرتين على المجال $[2, 4]$ و بحيث :
 $-3 \leq f(x) \leq 4$ و $-1 \leq g(x) \leq 5$

(1) أعط حصرًا للدالة $f+g$ ثم $3f-g$ على هذا المجال.

(2) أعط حصرًا لكل من التكاملين التاليين :

$$\int_2^4 (3f(x) - g(x)) dx \quad , \quad \int_2^4 (f(x) + g(x)) dx$$

11 - بين المتباينات التالية :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t^2) dt \leq 2 \quad (ج) \quad \frac{1}{3} \leq \int_1^2 \frac{1}{1+x} dx \leq \frac{1}{2} \quad (ب) \quad \int_{\frac{1}{3}}^1 \ln t \, dt \geq -\frac{2}{3} \ln 3 \quad (ا)$$

12 - احسب حجم الجسم المولد بالدوران حول المحور (xx') للمساحة المحصورة بين النحنيين ذوي المعادلات $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ و $y = \frac{1}{x}$ و $1 \leq x \leq e$.

13 - احسب حجم الجسم المولد بتدوير حول (xx') للمساحة المحصورة بين النحنيين ذوي المعادلة $y = \sqrt{x}$ و $y = x^2$ و $1 \geq x \geq 0$.

14 - من أجل كل عدد طبيعي n نضع $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin^2 x \, dx$

بين $0 \leq I_n \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+1}$ ما هي نهاية المتتالية (I_n) ؟

15 - من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$ بين ان $\frac{x}{x+1} \leq \ln(x+1) \leq x$ بين ان $f(t) = \frac{1}{1+t}$ على المجال $[0, x]$ يمكنك استعمال حصر الدالة f المعرفة بـ

16 - باستعمال نظرية حصر القيمة المتوسطة للدالة $x \rightarrow \cos x$ على المجال $[x, y]$ بين ان

$$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$$

(ب) بطريقتين مماثلة بين ان $|\cos x - \cos y| \leq |x - y|$

17 - (1) باستعمال دستور الكاملة بالتجزئة مرتين احسب $I = \int_0^3 x^2 e^{-2x} dx$

(2) لتكن f دالة معرفة على $[0, 3]$ بالعلاقة $f(x) = x e^{-x}$ و (γ) متنهاها البياني في معلم متعامد ومتجانس، طول الوحدة 4 cm ، وليكن S الجسم المحصل عليه بالتدوير حول (xx') للمنحنى ذو المعادلة $y = f(x)$. عبر عن V بدلالة I ثم حدد قيمة مقربة لـ V حجم هذا الجسم إلى 1 cm^3

18 - نريد حصر التكامل $J = \int_0^1 \frac{x e^x}{1+e^x} dx$

(1) لتكن g دالة معرفة على $[0, 1]$ بـ $g(x) = \ln(1+e^x)$ و (γ) منحنها البياني في معلم متعامد ومتجانس (O, \vec{i}, \vec{j}) ، نقطة من (γ) فاصلتها معلومة و B نقطة من (γ) فاصلتها 1

(ا) ادرس تغيرات الدالة g ثم عين معادلة المماس لـ (γ) في النقطة A

(ب) نقطة تقاطع المماس في A مع القطعة $[AB]$ حيث $I(1, 0)$

احسب مساحة كل من الشكلين $OIPA$ و $OIBA$

(2) نقبل ان المنحنى (γ) محصور بين القطعتين $[AP]$ و $[AB]$ ، بين ان

$$\ln 2 + \frac{1}{4} \leq \int_0^1 g(x) dx \leq \ln \sqrt{2(1+e)}$$

(3) باستعمال التكامل بالتجزئة عبر عن J بدلالة $\int_0^1 g(x) dx$ ثم استنتج حصرًا لـ J

19 - عين الدالة الأصلية للدالة f على المجال المعطى باستعمال الدساتير الشهيرة :

$$I =]3, +\infty[\quad \text{و} \quad f(x) = \frac{3}{2x-6} \quad (2) \quad , \quad I = \mathbb{R} \quad \text{و} \quad f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+3} \quad (1)$$

$$I =]0, \frac{\pi}{2}[\quad \text{و} \quad f(x) = \frac{\sin x}{\cos x} \quad (4) \quad , \quad I =]-1, +\infty[\quad \text{و} \quad f(x) = \frac{2x^2}{x^3+1} \quad (3)$$

$$I =]0, +\infty[\quad \text{و} \quad f(x) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{-1}{x}} \quad (6) \quad , \quad I =]0, +\infty[\quad \text{و} \quad f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x}} \quad (5)$$

$$I = \mathbb{R} \quad \text{و} \quad f(x) = \frac{e^{-x} - e^x}{e^x + e^{-x}} \quad (8) \quad , \quad I = \mathbb{R} \quad \text{و} \quad f(x) = -5e^{-4x+3} \quad (7)$$

2- أوجد العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كل عدد حقيقي x يكون
 $f(x) = a f'(x) + b f''(x)$ ثم استنتج دالة أصلية للدالة f على \mathbb{R} .

25- نضع $F(x) = \int_0^x \frac{-3}{\sqrt{t^2+5}} dt$

1) احسب $F(0)$ ، ثم احسب $F'(x)$
 2- ادرس تغيرات الدالة F ثم شكل جدول تغيراتها وعين إشارة $F(x)$

26- نضع $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2x) dx}{1+2\sin x}$

احسب $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+2\sin x} dx$ و $I+J$ ثم استنتج قيمة I .

27- f دالة معرفة على \mathbb{R} بالعبارة $f(x) = (2-x)e^x$
 بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون $f(x) + f''(x) = 2f'(x)$ ثم استنتج
 قيمة التكامل $\int_0^1 f(t) dt$

28- نضع $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x}{\cos x - \sin x} dx$ و $J = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{\cos x - \sin x} dx$
 احسب $I+J$ و $I-J$ ثم استنتج I و J

29- نضع $f(t) = \int_0^t \frac{2x}{(x^2-1)^2} dx$ مع $t \in [0, 1]$

احسب التكامل $\int_0^1 f(t) dt$ ثم عين نهاية $f(t)$ لـ t يؤول إلى 1 يقيم صغرى.

30- لتكن f دالة معرفة بالعبارة $f(x) = x^2 + 2x$
 احسب التكاملين $I = \int_{-1}^2 f(x) dx$ و $J = \int_{-1}^2 (x^2 + 2|x|) dx$

31- احسب قيمة I باستعمال التكامل بالتجزئة في كل حالة من الحالات التالية:
 $I = \int_0^{\pi} (t-2) \cos t dt$ (2) ، $I = \int_1^2 t \ln t dt$ (1)

9) $f(x) = \cos x - x \sin x$ و $I = \mathbb{R}$

10) $f(x) = \frac{x \sin x + \cos x}{x^2}$ و $I =]0, \frac{\pi}{2}[$

11) $f(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ و $I =]0, +\infty[$

12) $f(x) = \tan x + x \tan^3 x$ و $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

20- u و v دالتان معرفتان على $I = [0, \frac{\pi}{4}]$ بـ $u(x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x}$ و $v(x) = \frac{1}{\cos^4 x}$

1) تحقق أنه من أجل كل x من I يكون $u'(x) = \frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x}$

2) أوجد دالة أصلية لـ v على I التي تنعدم عند الصفر.

مشتق الدالة $x \rightarrow \tan(x)$ هي الدالة $x \rightarrow 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$

21- في كل ما يلي f دالة ناطقة معرفة على مجال معطى بين أن $f'(x)$ تكتب على الشكل
 المعطى، ثم استنتج دالة أصلية للدالة f :

1) $f(x) = \frac{x+2}{x+3}$ ، $f'(x) = a + \frac{b}{x+3}$ ، $I =]-3, +\infty[$

2) $f(x) = \frac{3x+5}{4x+2}$ ، $f'(x) = a + \frac{b}{4x+2}$ ، $I =]-\frac{1}{2}, +\infty[$

3) $f(x) = \frac{x^2+3x+4}{x+2}$ ، $f'(x) = a + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{(x+2)^2}$ ، $I =]-2, +\infty[$

4) $f(x) = \frac{5x^3+4x^2+2x+1}{(x+2)^2}$ ، $f'(x) = a + \frac{b}{(x+2)^2} + \frac{c}{(x+2)^3}$ ، $I =]-2, +\infty[$

22- f و g و h دوال معرفة على \mathbb{R} بـ $f(x) = \sin x + \cos^3 x$

و $g(x) = \sin^4 x \cos^5 x$ و $h(x) = \cos^2 x \sin^4 x$ عين الدوال الأصلية للدوال المعطاة.

23- f دالة معرفة على \mathbb{R} بـ $f(x) = \cos^4 x$

1- احسب $f'(x)$ و $f''(x)$ ثم عبر عن $f(x)$ بدلالة $f''(x)$ و $\sin(2x)$

2- استنتج الدالة الأصلية F للدالة f على \mathbb{R}

24- f دالة معرفة على \mathbb{R} بـ $f(x) = e^{3x} \sin x$

1- احسب $f'(x)$ و $f''(x)$

(3) نقيبل أن القطع المكافئ (Γ) يبقى فوق (γ) على المجال $[0, \pi]$ ، احسب مساحة الحيز المحصور بين هاتين المنحنيين.

36 - f دالة معرفة على \mathbb{R} بالعلاقة $f(x) = 1 + x - x e^{-x^2+1}$ و (γ) منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس (O, \vec{i}, \vec{j}) طول الوحدة 2 cm .

- (1) تحقق أن (γ) يقبل النقطة $I(1, 0)$ كمركز تناظر له.
- (2) برهن أن (γ) يقبل مستقيم مقارب (d) عند $(+\infty)$ ، ثم حدد وضعيته بالنسبة إلى (γ) .
- (3) من أجل كل عدد حقيقي $\lambda \geq 0$ ، $S(\lambda)$ هي المساحة بـ cm^2 للحيز المستوي المحدد بالمنحني (γ) و (d) والمستقيمات التي معادلاتها $x=0$ و $x=\lambda$.
- (أ) عبر عن $S(\lambda)$ بدلالة λ .
- (ب) ما هي النهاية S للمساحة $S(\lambda)$ لما λ يؤول إلى $(+\infty)$ ؟
- (ج) عين العدد الحقيقي λ_0 بحيث لما $\lambda \geq \lambda_0$ يكون $|S - S(\lambda)| \leq 10^{-2}$.

37 - معلم متعامد ومتجانس نعتبر القطع المكافئ (P) ذو المعادلة $y = 16 - x^2$ الرسوم على المجال $[-4, 4]$. بتدوير P حول $(O\gamma)$ نحصل على مجسم دوراني (Σ) .

- (1) ما هي طبيعة مقطع من (Σ) بمستو عمودي على $(O\gamma)$ ؟
- (2) عبر بدلالة y حيث $16 \geq y \geq 0$ عن مساحة هذا القطع، ثم احسب مساحة (Σ) .

38 - (U_n) متتالية معرفة على \mathbb{N}^* بـ $U_n = \int_0^2 \frac{2t+3}{t+2} e^t dt$.

- (1) ادرس تغيرات الدالة f على المجال $[0, 2]$ حيث $f(t) = \frac{2t+3}{t+2}$.
- (ب) استنتج أن $\frac{3}{2} n \left(e^{\frac{2}{n}} - 1 \right) \leq U_n \leq \frac{7}{4} n \left(e^{\frac{2}{n}} - 1 \right)$.
- (ج) بين أنه إذا كانت (U_n) تقبل نهاية ℓ فإن $3 \leq \ell \leq \frac{7}{2}$.

(2) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي t من $[0, 2]$ $\frac{2t+3}{t+2} = 2 - \frac{1}{t+2}$.

ثم استنتج قيمة I حيث $I = \int_0^2 \frac{2t+3}{t+2} dt$.

- (ب) بين أنه من أجل كل $t \in [0, 2]$ يكون $t \leq e^t \leq e^{\frac{2}{n}}$ ثم استنتج أن $I \leq U_n \leq e^{\frac{2}{n}} \times I$.
- ثم تحقق أن المتتالية (U_n) متقاربة ثم عين نهايتها ℓ .

$$I = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t+1}} dt \quad (4) \quad I = \int_0^1 (3t+1)e^{-t} dt \quad (3)$$

$$I = \int_0^1 (3t+1)e^t dt \quad (6) \quad I = \int_0^1 (2t^2 - t + 1)e^t dt \quad (5)$$

32 - لتكن التكاملات I, J, K بحيث،

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin^2 x dx \quad \text{و} \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos^2 x dx \quad \text{و} \quad K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos(2x) dx$$

- (1) باستعمال التكامل بالتجزئة مرتين بين أن $K = \frac{e^{\frac{\pi}{2}} - 1}{5}$.
- (2) احسب $I+J$ و $I-J$ ثم استنتج I و J .
- (3) بالتعبير عن $\cos^2 x$ و $\sin^2 x$ بدلالة $\cos(2x)$ أوجد باستعمال K قيمة I و J .

33 - f دالة معرفة على $]1, +\infty[$ بالعلاقة $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$.

- (1) احسب $f'(x)$ ثم استنتج قيمة $I = \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}}$.
- (2) نضع $J = \int_{\sqrt{2}}^2 \sqrt{x^2 - 1} dx$ باستعمال التكامل بالتجزئة عبر عن $I+J$ بدلالة J ثم استنتج قيمة J .

34 - من أجل كل $x > 0$ نعتبر التكاملين،

$$I_n = \int_0^x \sin^{2n} t dt \quad \text{و} \quad J_n = \int_0^x (\sin^{2n} t - \cos^2 t) dt \quad \text{مع} \quad n \in \mathbb{N}$$

- (1) أوجد علاقة بين I_n و I_{n+1} .
- (2) باستعمال التكامل بالتجزئة احسب J_n بدلالة I_{n+1} .
- ثم استنتج علاقة تربط بين I_n و I_{n+1} .
- (3) احسب I_0 ثم بين أنه يمكن حساب I_1 و J_0 .

35 - ليكن للنحنى (γ) ذو المعادلة $y = \sin x$ مع $\pi \geq x \geq 0$ و (Γ) للنحنى ذو المعادلة

$$y = ax^2 + bx + c$$

- (1) ارسم (γ) في معلم متعامد ومتجانس. نرمز بـ A إلى النقطة من (γ) بحيث المماس عندها يوازي (π, π) .
- (2) عين الأعداد a, b, c بحيث (Γ) يمر من المبدأ O ويقبل A كنقطة له، ثم ارسم (Γ) على نفس المجال.

39

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم نضع $I_n = \int_1^e (Ln x)^n dx$

(1) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $[1, e]$ ومن أجل كل عدد طبيعي

n يكون $0 < (Ln x)^n - (Ln x)^{n+1}$ ثم استنتج أن المتتالية (I_n) متناقصة

(ب) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n يكون $I_n \geq 0$ ثم استنتج أن المتتالية (I_n) متقاربة

(2) احسب I_1

(ب) برهن باستعمال التكامل بالتجزئة أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n

يكون $I_{n+1} = -e(n+1)I_n$ ثم استنتج القيم الضبوطة لـ I_2 ، I_3 و I_4

(3) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n يكون

$I_n \leq e(n+1)$ ثم استنتج نهاية المتتالية (I_n)

(ب) ما هي قيمة $nI_n + (I_n + I_{n+1})$ ؟ ثم استنتج نهاية المتتالية (nI_n)

40

نريد حصر التكامل $I = \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx$ بواسطة طريقة المستطيلات

(1) ارسم التمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ على المجال $[0, 3]$

(2) نجزئ المجال $[0, 3]$ إلى n مجال كل منها له نفس الطول حيث $n \geq 1$

(أ) بين أن مجموع مساحات المستطيلات الكبرى يكتب على الشكل $U_n = \frac{3}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k-1}{n} \times 3\right)$

- بين أن مجموع مساحات المستطيلات الصغرى يكتب على الشكل:

$V_n = \frac{3}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n} \times 3\right)$ حيث (U_n) و (V_n) تعرف متتاليتين من أجل $n \geq 1$

(ب) بين أن $U_n - V_n = \frac{3}{n} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3^2+1}}\right)$

(ج) بين أن $U_n - V_n < \frac{7}{10n}$

(د) استنتج قيمة n_0 بحيث من أجل كل $n \geq n_0$ يكون $0 < U_n - V_n < 10^{-2}$

وهذا باستعمال السؤال (ج)

(و) أوجد الحصر للتكامل I الموافق للقيمة n_0

41

من أجل كل x من $]0, +\infty[$ نضع $F(x) = \int_0^x Ln(1+e^{-2t}) dt$

(1) ادرس اتجاه تغير الدالة F

(2) ليكن a عدد حقيقي موجب تماما. تحقق أنه من أجل كل t من $[1, 1+a]$ يكون

$$\frac{a}{a+1} \leq Ln(a+1) \leq a \quad \text{واستنتج أن} \quad \frac{1}{1+a} \leq \frac{1}{t} \leq 1$$

(3) استنتج من السؤال (2) أن $\int_0^x \frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}} dt \leq F(x) \leq \int_0^x e^{-2t} dt$

$$\text{ثم} \quad \frac{1}{2} Ln(2) - \frac{1}{2} Ln(1+e^{-2x}) \leq F(x) \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2x}$$

(4) نقبل أنه لا x يؤول إلى $(+\infty)$ فإن نهاية $F(x)$ هي عدد حقيقي نرمز له بـ ℓ بين

$$\text{أن} \quad \frac{1}{2} Ln(2) \leq \ell \leq \frac{1}{2}$$

(5) من أجل كل عدد طبيعي n نضع $U_n = \int_n^{n+1} Ln(1+e^{-2t}) dt$

برهن أن $0 \leq U_n \leq Ln(1+e^{-2n})$ ثم استنتج أن (U_n) متقاربة ثم احسب نهايتها

(6) من أجل كل عدد طبيعي n نضع $S_n = \sum_{k=1}^n U_k$

- عبر عن S_n بدلالة n و F ثم بين أن المتتالية (S_n) متقاربة ثم عين نهايتها.

42

من أجل كل عدد طبيعي n نضع $f_n(x) = \frac{x^n}{x^2+x+1}$ و $I_n = \int_0^1 f_n(t) dt$

(1) بين أن المتتالية (I_n) معرفة جيدا ثم ادرس اتجاه تغير (I_n)

(2) باستعمال الحصر على المجال $[0, 1]$ للبايتين $U: x \rightarrow 1+x+x^2$ و $x \rightarrow \frac{1}{x}$

بين أن $\frac{1}{3(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ ثم استنتج تقارب المتتالية (I_n)

43

نعرف من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ التكامل $I_n = \int_0^2 \frac{1}{n!} (2-x)^n e^x dx$

(1) احسب I_1 ثم تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ يكون

$$0 \leq I_n \leq \frac{2^n}{n!} (e^2 - 1)$$

(2) باستعمال التكامل بالتجزئة بين أنه من أجل كل $n \geq 1$ يكون

$$I_{n+1} = I_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$$

(3) برهن بالتراجع أن $e^2 = 1 + \frac{2}{1!} + \dots + \frac{2^n}{n!} + I_n$

(14) نضع من أجل كل $n \geq 1$ $U_n = \frac{2^n}{n!}$ احسب $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ ثم بين أنه من أجل كل

عدد طبيعي $n \geq 3$ يكون $U_{n+1} \leq \frac{1}{2} U_n$

(ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 3$ يكون $0 \leq U_n \leq U_3 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$

(15) استنتج نهاية المتتالية (U_n) ثم نهاية (I_n)

(ب) تحقق أن $e^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \dots + \frac{2^n}{n!}\right)$

نعتبر الدالتين f و g العرقتين على $I = [0, 1]$ ب $f(x) = -x^2 + 2x$ و $g(x) = \sqrt{x}$

(1) ادرس تغيرات f ثم ارسم منحناها البياني على المجال I في معلم متعامد ومتجانس (طول الوحدة هو 10 cm) وحدد المماس للمنحنى عند كل من النقطتين ذات الفاصلتين 0 و 1.

(2) ارسم المنحنى الممثل للدالة g ثم حدد المماس عند النقطة ذات الفاصلة 0

(3) بين أن تكامل f و تكامل g على المجال I متساويين.

(4) بين أن المعادلة $f(x) = g(x)$ على المجال $[0, 1]$ تكافئ $(x-1)(x^2-3x+1) = 0$

(5) استنتج أن المنحنيين لهما نقطة مشتركة فاصلتها α حيث $0 < \alpha < 1$

(ب) احسب α ثم استنتج الوضع النسبي للمنحنيين

(6) احسب مساحة الحيز المستوي المحصور بين المنحنيين.

(45) لتكن f_0 دالة معرفة على $I = [0, +\infty[$ ب $f_0(x) = e^{-x}$ ومن أجل كل عدد حقيقي

موجب تماماً α ، f_α دالة معرفة كما يلي:

$f_\alpha(0) = 0$ و $f_\alpha(x) = x^\alpha e^{-x}$ من أجل $x > 0$

(γ_α) المنحنى البياني للدالة f_α في معلم متعامد ومتجانس $(\vec{O}, \vec{i}, \vec{j})$ طول الوحدة (4 cm)

(1) ادرس تغيرات الدالتين f_0 و f_1 وارسم (γ_0) ، (γ_1) في نفس المعلم.

(2) نفرض أن $\alpha > 0$ و $\alpha \neq 1$ ، ادرس استمرار وقابلية اشتقاق f_α عند العدد $x_0 = 0$

(3) ادرس تغيرات f_α

(4) ليكن $\alpha > 0$ ، ادرس الوضع النسبي لـ (γ_α) و (γ_0) على $]0, +\infty[$

(5) ليكن α و β عدديين حقيقيين بحيث $\beta > \alpha > 0$ ادرس الوضع النسبي لـ (γ_α)

بالنسبة إلى (γ_β) على $]0, +\infty[$.

(6) برهن أن جميع المنحنيات (γ_α) تمر من نقطة ثابتة عينها.

(7) ارسم (γ_0) و $(\gamma_{\frac{1}{2}})$ في نفس المعلم السابق.

(8) نفرض أن $\alpha > 0$ و لتكن g_α اقتضار الدالة f_α على المجال $[\alpha, +\infty[$.

برهن أن g_α تقبل دالة عكسية g_α^{-1} عين جدول تغيراتها، ثم ارسم بيانها (خذ $\alpha = \frac{1}{2}$).

(9) نضع $\alpha = n$ حيث n عدد طبيعي ولتكن h_n دالة معرفة على I كما يلي:

$$h_n(x) = \int_0^x f_n(t) dt$$

(أ) احسب $h_0(x)$ و $h_1(x)$ من أجل كل x من $]0, +\infty[$

(ب) بين أنه من أجل كل x من I يكون $h_n(x) = -x^n e^{-x} + n h_{n-1}(x)$

(ج) عين الأعداد الحقيقية a_0, a_1, \dots, a_n بحيث تكون الدالة K_n المعرفة بـ:

$$K_n(x) = e^{-x} (a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0)$$

(د) استنتج عبارة $h_n(x)$ بدلالة x و n .

(هـ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $\lim_{x \rightarrow +\infty} h_n(x) = n!$

$$f_\alpha(x) = (x-\alpha)[1 - \ln(x-\alpha)] \quad , \quad x > \alpha$$

$$f_\alpha(\alpha) = 0$$

وليكن (γ_α) التمثيل البياني لها في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس.

(1) ادرس استمرار وقابلية اشتقاق f_α عند $\alpha = x_0$.

(2) ادرس حسب قيم α تغيرات f_α ثم ادرس وجود الستقييمات المقاربة لـ (γ_α) ارسم (γ_0) .

(3) برهن أن جميع المنحنيات (γ_α) هي صورة (γ_0) بواسطة انسحاب يطلب تعيينه.

ثم ارسم (γ_1) و (γ_{-1}) في نفس المعلم.

(4) احسب $S(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (γ_0) والمستقيم ذا المعادلة $y = 2$

والمستقيمين ذوي المعادلتين $x = \lambda$ و $x = e$ حيث $\lambda < e$ ثم احسب $\lim_{\lambda \rightarrow 0} S(\lambda)$

$$g(x) = \frac{2x^2}{x^2+1} - \ln(x^2+1) \quad \text{بالعبارة } \mathbb{R} - \{0\}$$

(1) ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم حدد النهاية عند $(+\infty)$ واستنتج أن المعادلة $g(x) = 0$

تقبل حلاً وحيداً α من المجال $[1, +\infty[$ وتحقق أن $2 > \alpha$

(2) (Γ) للمنحنى الممثل للدالة g في معلم متعامد ومتجانس

(أ) اكتب معادلة المماس (T) لـ (Γ) عند النقطة ذات الفاصلة 2.

(ب) (T) يقطع المحور (Ox) في نقطة فاصلتها x_0 ، احسب القيمة الضبوطة لـ x_0 .

V_1 و V_2 هما القيمتين التقريبية بتقريب 10^{-3} لـ x_0 .